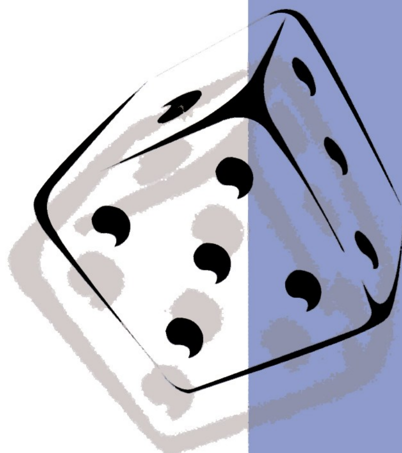
matematikos bibliotekėlė

Viktorija Sičiūnienė



KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

Autorė nuoširdžiai dėkoja savo šeimai ir kolegoms už supratimą, palaikymą ir paramą, prof. P. Survilai už pagalbą, tikslinant matematinių sąvokų prasmę, taip pat mokytojams ir jų mokiniams, savo mokiniams, dirbusiems su knygelių atskirais skyriais, noriai ir aktyviai prisidėjusiems juos tobulinant. Tai mokytojai: R. Greičiūtė (Kaišiadorių A. Brazausko vid. m-kla), A. Grinevičienė (Vilniaus „Ąžuolo“ vid. m-kla), O. Gutauskienė (Visagino „Žiburio“ pagr. m-kla), J. Mačernis ir A. Mikalauskienė (Vilniaus „Ąžuolo“ vid. m-kla), E. Motiejūnienė (Šiaulių „Romuvos“ vid. m-kla), A. Rimkevičienė (Šiaulių Didždvario g-ja), D. Šleinienė (Radviliškio raj. Labučių pagr. m-kla), R. Veikutytė (Vilniaus Žvėryno g-ja), V. Viniautienė (Vilniaus Fabijoniškių vid. m-kla), J. Žemaitytė (Vilniaus konservatorija).

Rašydama šią knygą daug naudingų patarimų bei pastabų sulaukiau iš V. Vanago, dr. A. Plikuso, dr. E. Žalio, dr. J. Mačio.

Rankraščio tekstą tvarkė J. Mačys, visus uždavinius persprendė Ž. Stundžienė, techninę pagalbą teikė T. Šeibakas ir R. Jakštys, knygelę maketavo L. Ališauskienė ir N. Drazdauskienė, kompiuterinę grafiką atliko I. Paukštienė ir E. Tatarinavičiūtė. Visiems jiems nuoširdžiai dėkoju.

Viktorija Sičiūnienė

Viktorija Sičiūnienė

KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

(pagrindinėje mokykloje)

Scanned by Cloud Dancing

TEV

VILNIUS 2005

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeušas Šeibakas, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Inga Paukštienė, Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą rinko ir maketavo: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė*

Konsultantai: *Pranas Survila, Elmundas Žalys*

Recenzavo Aleksandras Plikusas

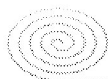
Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

© Leidykla TEV, Vilnius, 2005
© Viktorija Sičiūnienė, 2005
© Dail. Edita Tatarinavičiūtė, 2005

ISBN 9955-491-87-6



TURINYS



PRATARMĖ

Pirmosios kregždutės — statistikos, kombinatorikos ir tikimybių teorijos (stochastikos) skyreliai, iš kurių statistikos, kombinatorikos ir tikimybių teorijos pradmenų mokosi visi pagrindinių mokyklų mokiniai, — pasirodė 1996–2001 metais išleistuose matematikos vadovėliuose 5–10 klasėms. Lietuvos mokslininkai ir praktikai negailėjo jėgų gilindamiesi į atitinkamą stochastikos mokymo patirtį užsienyje, atliko daugybę tyrimų stochastikos mokymo srityje. Šiuo metu Lietuvoje yra sukurta stochastikos mokymo pagrindinėje mokykloje sistema, naujosiose Bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose (2003) yra patikslintas šio kurso turinys bei reikalavimai moksleivių gebėjimams.

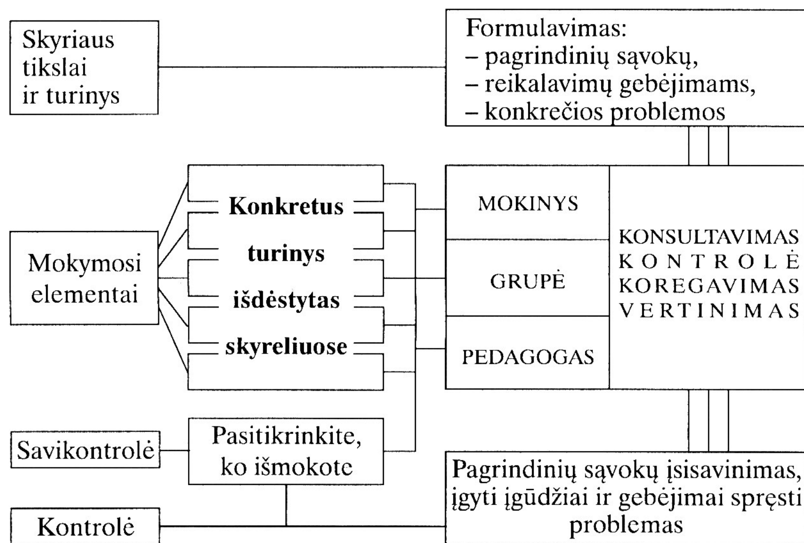
Remdamasi naujosiomis 5–10 klasių matematikos programomis ir standartais kombinatorikos ir tikimybių teorijos mokymo srityje, parengiau dvi knygeles: „Statistikos pradmenys" bei šią „Kombinatorika ir tikimybės". Leidykla TEV 2004 m. išleido pirmą iš jų, kuri jau spėjo susilaukti populiarumo bei gerų atsiliepimų. Šioje knygelėje skaitytojas ras visą būtiną mokymuisi medžiagą, atitinkančią kombinatorikos ir tikimybių teorijos pagrindinėje mokykloje temas.

Knygą sudaro du skyriai: „Kombinatorika" ir „Tikimybės". Juose pateikta medžiaga išdėstyta įgyjamų gebėjimų blokais, o ne klasių koncentrais, kaip esti išsilavinimų standartuose. Tai patogu norint per trumpą laiką įsisavinti, pasitikrinti, peržvelgti ar susisteminti atitinkamos srities kursą (kas aktualu vyresniųjų klasių mokiniams, VPU matematikos studentams, mokytojams). Medžiaga lengvai integruojama į kitas matematikos temas bei kitus mokomuosius dalykus. Knygos gale esančiame priede pateikti detalizuoti išsilavinimo standartų reikalavimai kiekvienos klasės koncentrui leis skaitytojui nesunkiai atsirinkti tinkamą mokymosi medžiagą. Patogumo dėlei pateikiu teminį planą 5–6, 7–8 ir 9–10 klasių grupėms, greta nurodydama numerius uždavinių, kuriuos tiktų spręsti tose klasėse:

Tema	*Uždavinių numeriai*	*Pamokų skaičius*
5–6 klasės		
1.1. Elementai ir jų rinkiniai	1–8	2
1.2. Galimybių medis	9–13	2
1.3. Galimybių lentelė	14–19	2
Pasitikrinkite, ko išmokote	39–40, 46	1

Tema	*Uždavinių numeriai*	*Pamokų skaičius*
7–8 klasės		
1.4. Daugybos taisyklė	20–29	2
2.1. Tikimybinis bandymas	47–53	2
2.2. Bandymo baigties tikėtinumas	54–62	3
Pasitikrinkite, ko išmokote	91–93	1
9–10 klasės		
1.5. Elementų tvarka rinkinyje ir daugybos taisyklės taikymas	30–38	2
2.3. Bandymo įvykio tikėtinumas	63–69	1
2.4. Klasikinis tikimybės apibrėžimas	70–86	6
2.5. Įvykiui priešingas įvykis	87–90	1
Pasitikrinkite, ko išmokote	40–46, 91–102	2

Abiejų skyrių medžiaga pateikta remiantis ta pačia metodine sistema.



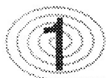
Kiekvieno skyriaus pradžioje pateiktas skyriaus turinys, išvardytos pagrindinės kombinatorikos ar tikimybių teorijos sąvokos, kurių mokomasi skyriuje, reikalavimai mokinio gebėjimams (mokymosi uždaviniai), taip pat pateikiamas gyvenimiškos problemos, susijusios su einama medžiaga, pavyzdys. Prieš pradėdamas mokytis skyrių, mokinys gali bandyti tam tikru lygmeniu spręsti šią problemą, remdamasis kasdienine patirtimi. Prie šios problemos grįžtama skyrelio pabaigoje.

Žinoma, knygelėje pateiktas problemas mokytojas gali pakeisti kitomis — labiau aktualiomis konkrečiai mokyklai ar klasei. Bet kuriuo atveju rekomenduojame šią problemą nagrinėti skiriant mokiniams projektinius darbus.

Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra skyrelis „Pasitikrinkite, ko išmokote". Šių skyrelių pirmasis uždavinys skirtas pasitikrinti, kaip įsisavintos skyriaus pagrindinės sąvokos. Šio skyrelio paskutinis uždavinys — pakartota skyriaus pradžioje iškelta problema. Likusieji skyrelių „Pasitikrinkite, ko išmokote" uždaviniai tikrina įvairius gebėjimus, atitinkančius skyriaus pradžioje surašytus reikalavimus.

Mokymas pagal šią knygą yra organizuojamas kritinio mąstymo pagrindu, formuojamu nuosekliai sprendžiant uždavinius. Knygoje yra užduočių, skirtų savarankiškam mokymuisi, yra užduočių, skirtų grupiniam darbui, šalia tradicinių yra užduočių, siūlančių aktyviuosius mokymo(si) metodus. Ši knygelė parašyta taip, kad mokinys ja galėtų naudotis savarankiškai, be mokytojo pagalbos. Teorinė medžiaga išdėstyta glaustai ir nuosekliai, visi kiekvieno skyrelio uždaviniai susiję su teorijoje aiškinama medžiaga, pateiktos savikontrolei skirtos užduotys. Knygos gale yra uždavinių atsakymai.

Autorė Viktorija Sičiūnienė



KOMBINATORIKA

Turinys

Pagrindinės sąvokos:

Elementų rinkinys, galimybių medis, galimybių lentelė, daugybos taisyklė.

Išmokęs skyrių, gebėsi:

- užrašyti dviejų elementų rinkinius (remdamasis braižomu galimybių medžiu, galimybių lentele ar sąrašu);
- pateikti pavyzdžių rinkinių, kuriuose elementų tvarka svarbi, ir pavyzdžių rinkinių, kuriuose elementų tvarka nesvarbi;
- taikyti daugybos taisyklę spręsdamas uždavinius.

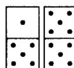
Problema:

Domino kauliuką sudaro du langeliai. Kiekviename langelyje pažymėtos akutės — jų gali būti 1, 2, 3, 4, 5, 6 arba nė vienos.

a) Keli kauliukai yra visų domino kauliukų komplekte?

b) Domino kauliukų komplektas sudėtas į stačiakampį. Tušti domino langeliai pažymėti 0, o langeliai su akutėmis — atitinkamu jų skaičiumi. Kai kurie kauliukai guli vertikaliai, o kai kurie — horizontaliai. Du kauliukai jau pažymėti. O kur yra kiti?

1	4	3	6	3	2	5
4	4	2	6	4	3	0
1	0	1	4	3	5	5
5	1	**5**	6	3	2	3
0	3	**5**	0	0	4	5
4	5	6	0	0	3	2
1	6	6	2	1	1	4
2	2	6	1	2	0	6



1.1. Elementai ir jų rinkiniai

Vienu metu metama moneta ir šešiasienis lošimo kauliukas, ir stebima, kaip jie atvirto. Kokios yra monetos ir kauliuko atvirtimo galimybės?

Moneta gali atvirsti skaičiumi arba herbu, o lošimo kauliukas — tam tikru akučių skaičiumi.

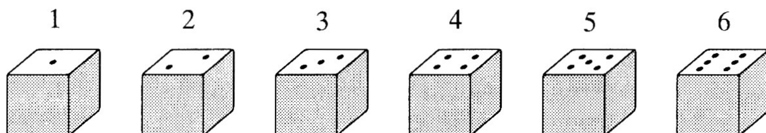
Susitarkime:

- monetos atvirtimą skaičiumi žymėti raide S, o atvirtimą herbu



žymėti raide H;

- lošimo kauliuko galimus atvirtimus žymėti skaičiais, atitinkančiais atvirtusių akučių skaičių:



Kadangi stebime *ir monetą, ir kauliuką*, tai kiekvieną jų poros atvirtimą žymėsime dviejų elementų — atitinkamos raidės ir skaičiaus rinkiniu.

Pavyzdžiui, jeigu moneta atvirs skaičiumi, kauliukas — šešiomis akutėmis, tai šią situaciją žymėsime elementų S ir 6 rinkiniu S6.

Jūs tikriausiai jau pagalvojote, o kodėl ne 6S?

Iš tiesų, mūsų pavyzdyje rinkinys S6 reiškia tą patį, kaip ir rinkinys 6S, todėl paprastumo dėlei susitarkime, kad iš pradžių nurodysime raidę, o po to — skaičių.

Užduotis.

a) Kokį monetos ir kauliuko atvirtimą reikš elementų H ir 3 rinkinys H3?

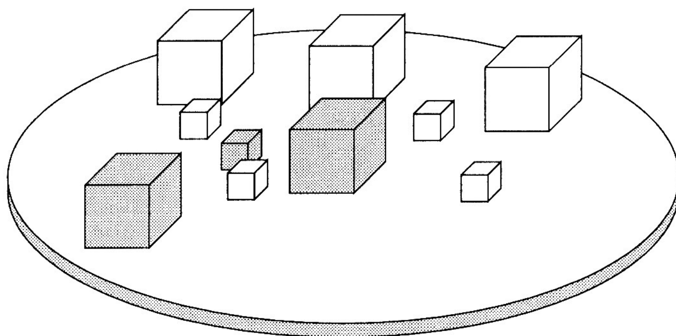
b) Užrašykite elementų rinkiniu tokią situaciją: moneta atvirto herbu, o kauliukas — viena akute.

c) Surašykite visus galimus monetos ir kauliuko atvirtimus, t. y. sudarykite visų rinkinių sąrašą:

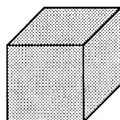
S1 S2 S3 ... ...
H1 ... ... H6

d) Kiek iš viso yra skirtingų monetos ir kauliuko atvirtimų?

1. Ant stalo sudėtos kaladėlės. Jos yra dviejų spalvų: baltos ir pilkos, ir dviejų dydžių: didelės ir mažos.



Susitarkime kaladėlės spalvą žymėti raide B, jei ji balta, ir raide P, jei ji pilka; kaladėlės dydį žymėti raide d, jei ji didelė, ir raide m, jei ji maža. Tada bet kuriai ant stalo gulinčiai kaladėlei galima priskirti raidžių (elementų) rinkinį, pavyzdžiui,

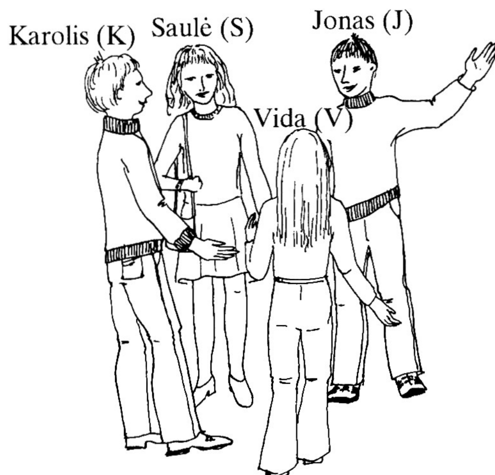

– Pd

a) Ar raidžių rinkiniai Pd ir dP reiškia skirtingas kaladėles?

b) Sudarykite visus įmanomus skirtingus tų raidžių rinkinius, reiškiančius skirtingas kaladėles.

c) Kiek yra skirtingų kaladėlių?

2. Susitikę keturi draugai pasisveikino, vienas kitam sakydami „labas“.



a) Raidžių rinkiniu KJ pažymėkime, kad Karolis Jonui pasakė „labas“. Ką reikštų raidžių rinkinys JK?

b) Kuria raide prasidėtų dviejų elementų rinkiniai, kuriais pažymėti Saulės ištarti „labas“ kiekvienam draugui?

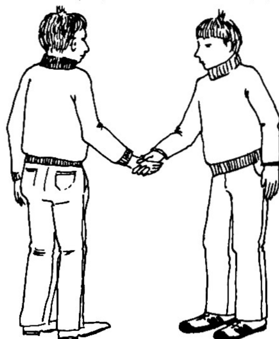
c) Ką reikštų raidžių rinkiniai VJ, VK, VS?

d) Kokiais raidžių rinkiniais nusakomi Karolio ištarti „labas“ kiekvienam draugui?

e) Surašykite visus nuskambėjusius pasisveikinimus žyminčius raidžių rinkinius.

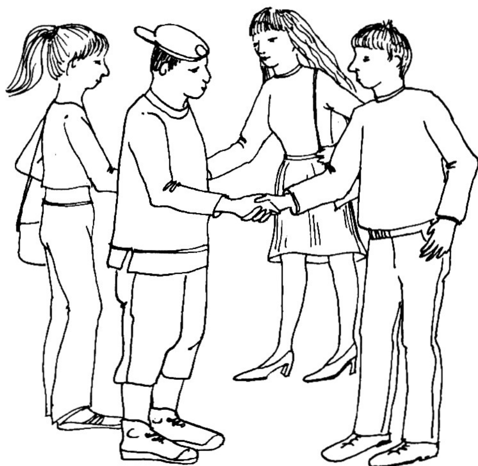
f) Kiek kartų nuskambėjo žodis „labas“?

3. 1) Susitikę *du* draugai Karolis (K) ir Jonas (J) pasisveikino vienas kitam paspausdami ranką.



Šiuo atveju raidžių rinkinys KJ reiškia tą patį pasisveikinimą, kaip ir rinkinys JK, nes yra tik vienas rankų paspaudimas. Galima susitarti, kad tuo atveju, kai raidžių (elementų) tvarka rinkinyje nesvarbi, tai raides rinkinyje žymėsime abėcėlės tvarka. Mūsų pavyzdyje — rinkiniu JK.

2) Susitikę keturi draugai Petras (P), Sigita (S), Ramunė (R) ir Vilius (V) pasisveikino vienas kitam paspausdami ranką.



a) Užkoduokite raidžių rinkiniais visus Petro pasisveikinimus.

b) Kiek buvo rankų paspaudimų iš viso?

4. Iš skaitmenų 1 ir 2 sudarykite visus dviženklius skaičius.

a) Kiek yra dviženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1 ir 2, jei skaičiuje skaitmenys nesikartoja (nėra vienodų skaitmenų)?

b) Kiek yra dviženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1 ir 2, jei abu skaičiaus skaitmenys yra vienodi (kartojasi)?

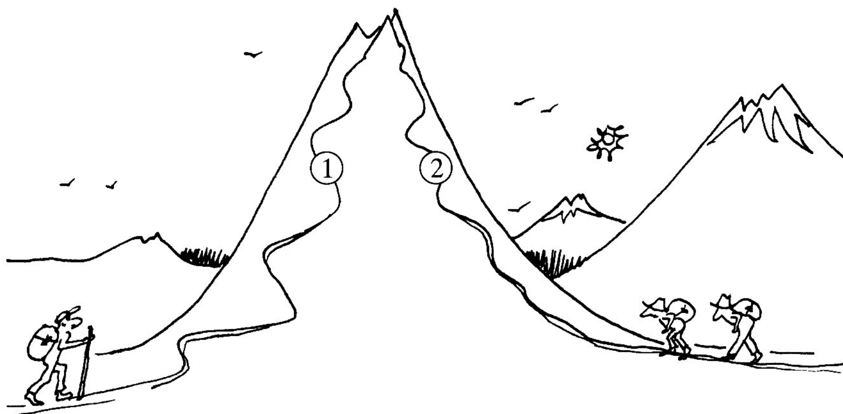
5. Iš skaitmenų 1, 2 ir 3 sudaromi dviženkliai skaičiai. Surašykite visus tokius dviženklius skaičius, jeigu:

a) skaitmenys skaičiuje gali kartotis;

b) skaičiuje negali būti vienodų skaitmenų;

c) skaičiaus visi skaitmenys yra vienodi.

6. Į kalno viršūnę veda du takeliai (1 ir 2). Turistai gali bet kuriuo takeliu lipti į kalną ir bet kuriuo takeliu leistis nuo kalno.



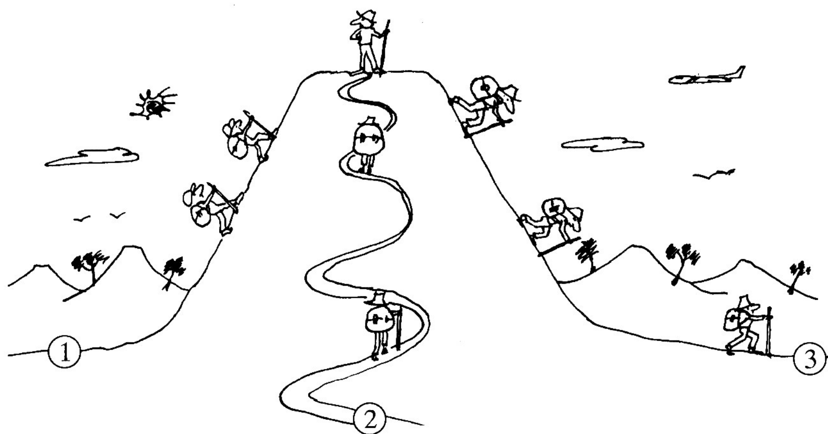
a) Keliais skirtingais takeliais turistas gali užlipti į kalną?

b) Keliais skirtingais takeliais turistas gali nusileisti nuo kalno?

c) Surašykite visus maršrutus kodais. Pavyzdžiui, kodas 12 reiškia, kad į kalną turistas lipo pirmu numeriu pažymėtu takeliu, o leidosi antru numeriu pažymėtu takeliu. Ar kodai 12 ir 21 reiškia tą patį maršrutą?

d) Kiek yra skirtingų maršrutų, jei lipti į kalną ir leistis nuo jo galima bet kuriuo takeliu?

7. Į kalno viršūnę veda trys takeliai (1, 2 ir 3):



a) Keliais skirtingais takeliais turistas gali užlipti į kalną?

b) Keliais skirtingais takeliais turistas gali nusileisti nuo kalno?

c) Surašykite visus maršrutų kodus, jeigu turistas gali pakilti bet kuriuo takeliu, o nusileisti — kitu takeliu negu pakilo.

d) Kiek yra skirtingų maršrutų, jei lipti ir leistis galima tik tuo pačiu takeliu?

e) Kiek yra skirtingų maršrutų, jeigu į kalną galima pakilti tik antru (2) takeliu, o nusileisti — bet kuriuo iš trijų takelių?

8. Iš skaitmenų 0, 1 ir 2 sudaromi dviženkliai skaičiai. Surašykite visus tokius skaičius, jeigu:

a) skaitmenys skaičiuje gali kartotis;

b) skaičiuje negali būti vienodų skaitmenų;

c) skaičiaus abu skaitmenys yra vienodi.

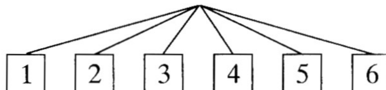
Nurodymas. Dviženklis skaičius negali prasidėti skaitmeniu 0.

1.2. Galimybių medis

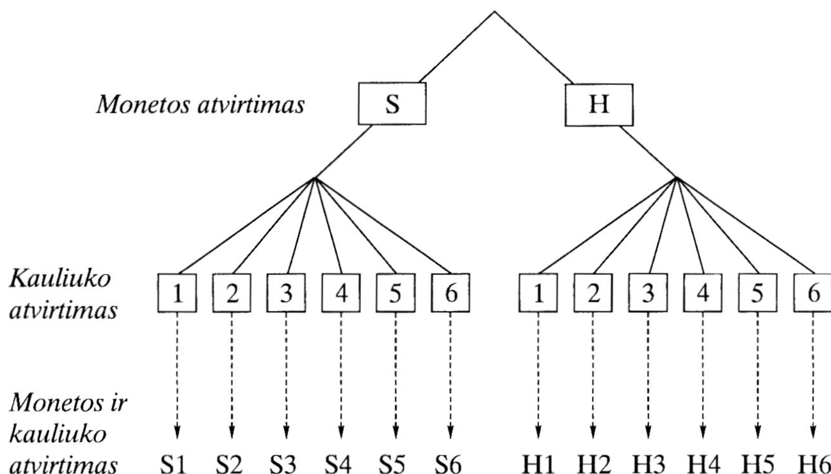
Prisiminkime 1.1 skyrelio pradžioje buvusį pavyzdį: *Vienu metu metama moneta ir šešiasienis lošimo kauliukas, ir stebima, kaip jie atvirto. Kokios yra monetos ir kauliuko atvirtimo galimybės?*

Pavaizduokime schemomis monetos ir kauliuko atvirtimus:

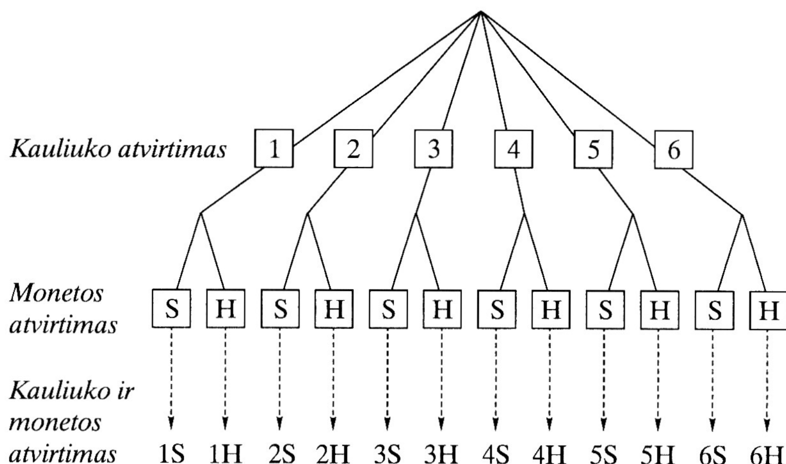




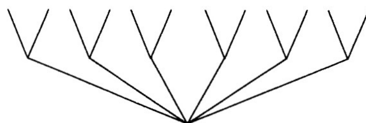
Visus monetos ir kauliuko atvirtimus galima pavaizduoti schema, dar vadinama *galimybių medžiu*:



O taip atrodytų galimybių medžio schema, jeigu iš pradžių žymėtume kauliuko atvirtimą, o po to — monetos atvirtimą:

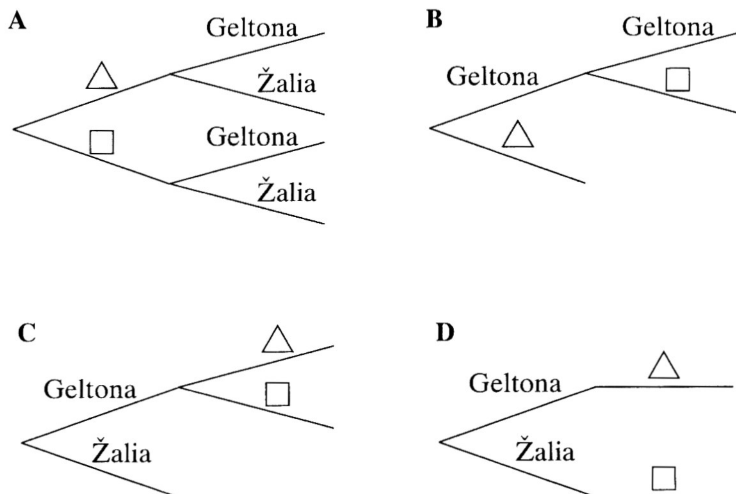


Tik nepamanykite, kad medžio „šakos“ gali būti braižomos tik iš viršaus į apačią. Galimybių medis gali būti braižomas ir iš kairės į dešinę, ir iš dešinės į kairę, ir iš apačios į viršų ar dar kitaip, pavyzdžiui:

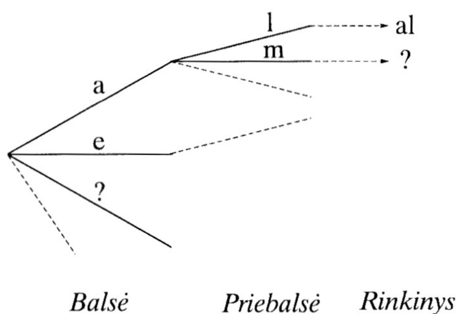


Galimybių medis ne tik padeda „pamatyti“, kaip susidaro visi rinkiniai, bet yra panašus ir į tikrą medį.

9. Kuris galimybių medis atitinka tokią situaciją: daromos dviejų formų figūros ir dažomos viena iš dviejų spalvų?



10. Iš raidžių a, e, i, l, m, n, u sudaromi dviejų raidžių rinkiniai: iš pradžių rašoma balsė, po to – priebalsė. Pabaikite braižyti galimybių medį ir surašykite visus rinkinius.



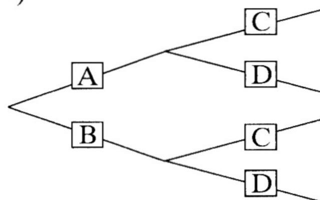
11. Braižydami galimybių medį nustatykite, kiek yra skirtingų dviženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 5, 6, 7 ir 8, jei:

a) skaitmenys skaičiuje kartotis negali;

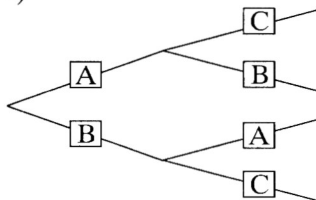
b) skaitmenys skaičiuje kartotis gali.

12. Sugalvokite uždavinio sąlygą, kurio sprendimą galima būtų pailiustruoti tokiu galimybių medžiu:

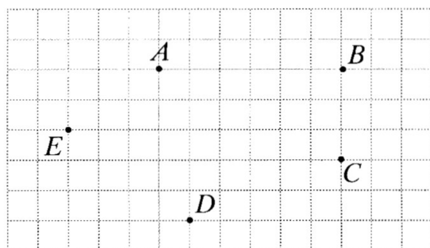
a)



b)



13. Duoti penki taškai.

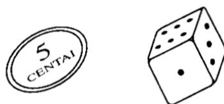


a) Kiekvieni du taškai yra jungiami atkarpa. Užrašykite visas tokiu būdu galimas gauti atkarpas.

b) Jungiant atkarpomis bet kuriuos tris taškus (iš pažymėtų penkių) sudaromi trikampiai. Nustatykite, kiek yra skirtingų trikampių, kurių viršūnės yra bet kurie trys iš pažymėtų taškų.

1.3. Galimybių lentelė

Dar kartą prisiminkime 1.1 skyrelio pradžioje pateiktą pavyzdį: *Vienu metu metama moneta ir šešiasienis lošimo kauliukas, ir stebima, kaip jie atvirto. Kokios yra monetos ir kauliuko atvirtimo galimybės?*



Nusibraižykime lentelę, dar vadinamą *galimybių lentele*, kurios pirmame stulpelyje surašykime monetos galimus atvirtimus, o pirmoje eilutėje — kauliuko galimus atvirtimus:

Kauliuko atvirtimas

Monetos atvirtimas		1	2	3	4	5	6
	S						
	H						

Kiekviename lentelės langelyje, kurį gauname sukirtę atitinkamą eilutę ir stulpelį, rašome eilutę ir stulpelį atitinkančių elementų rinkinį:

	1	2	3	4	5	6
S	S1					
H						

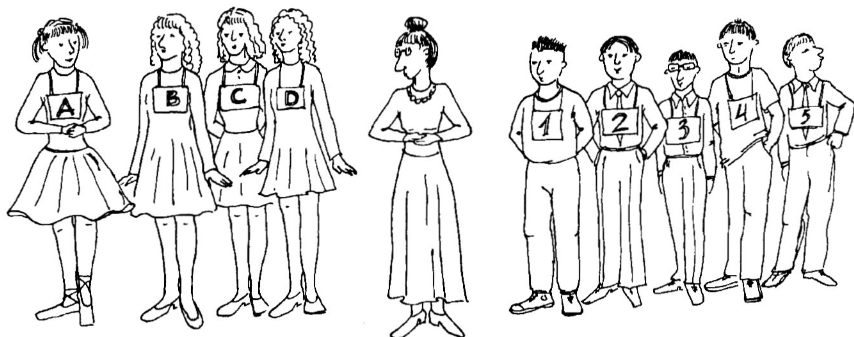
Užpildę šią lentelę, matysime visus dvylika monetos ir kauliuko galimų atvirtimo variantų.

Užduotis. Pabaikite pildyti lentelę:

Kauliuko atvirtimas

Monetos atvirtimas		1	2	3	4	5	6
	S	S1		S3			
	H					H5	

14. Į šokių repeticiją atėjo 4 merginos (A, B, C ir D) ir 5 vaikinai (1, 2, 3, 4, 5). Kokias skirtingas poras iš jų gali sudaryti šokių mokytoja?



Išspręskite uždavinį, nusibraižę ir užpildę galimybių lentelę:

Vaikinai

Merginos		1	2	3	4	5
	A					
	B					
	C					
	D					

15. Kokie skirtingi dviženkliai skaičiai gali būti sudaryti iš skaitmenų 1, 3 ir 5, jei:

a) skaitmenys skaičiuje kartotis negali;

b) skaitmenys skaičiuje kartotis gali;

c) abu skaitmenys skaičiuje vienodi?

Kuri lentelė kurio uždavinio sprendimą iliustruoja?

1)

	1	3	5
1	—	13	15
3	31	—	35
5	51	53	—

2)

	1	3	5
1	11	13	15
3	31	33	35
5	51	53	55

3)

	1	3	5
1	11	—	—
3	—	33	—
5	—	—	55

16. Keliais būdais galima pasirinkti žiedą ir grandinėlę iš 5 esamų žiedų ir 3 grandinėlių? Pasirinkite kiekvieno žiedo ir kiekvienos grandinėlės kodą bei nusibraižę ir užpildę lentelę išspręskite uždavinį.



17. Dėžutėje yra 5 skirtingų rūšių mašinėlės: baltos mažos, baltos didelės, juodos mažos, juodos vidutinės ir juodos didelės.

a) Kokie du požymiai apibūdina kiekvieną mašinėlę?

b) Kokias reikšmes gali įgyti kiekvienas požymis?

c) Nubraižykite galimybių medį arba sudarykite galimybių lentelę, atitinkančią duotą situaciją.

18. Sugalvokite uždavinio sąlygą, kurios sprendimą iliustruotų tokia galimybių lentelė:

a)

	A	B
1		
2		
3		

b)

	A	T	E
0			
1			

19. GRUPINIS DARBAS

- Peržvelkite 1.1–1.3 skyrelius. Kokie būdai padeda pamatyti dviejų elementų rinkinius?
- Kuris būdas rinkiniams „pamatyti“ jums atrodo geresnis ir kodėl? Norėdami sužinoti jūsų klasės mokinių nuomonę apie jiems labiausiai patikusį būdą rinkiniams „pamatyti“, parenkite anketą, atlikite apklausą klasėje. Gautus duomenis surašykite dažnių lentelėje, pavaizduokite juos diagrama. Ar jūsų nuomonė sutapo su klasės mokinių daugumos nuomone?

1.4. Daugybos taisyklė

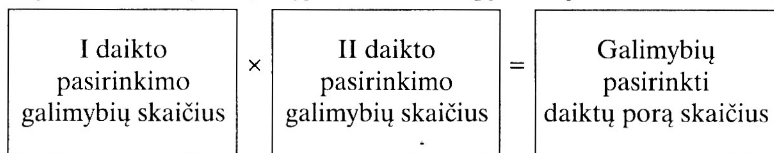
Paskutinį kartą prisiminkime 1.1. skyrelio pradžioje buvusį pavyzdį:

Vienu metu metama moneta ir šešiasienis lošimo kauliukas, ir stebima, kaip jie atvirto. Kokios yra monetos ir kauliuko atvirtimo galimybės?

Visus monetos ir kauliuko atvirtimų variantus galima suskaičiuoti nusibraižius galimybių medį, galimybių lentelę ar kitu būdu juos išrašius.

Tačiau variantų (būdų) skaičių galima tiesiog apskaičiuoti, remiantis *daugybos taisykle*:

Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius lygus galimybių pasirinkti pirmąjį daiktą skaičiaus ir galimybių pasirinkti antrąjį daiktą skaičiaus sandaugai.



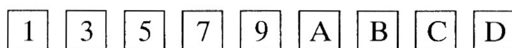
Kadangi moneta gali atvirsti bet kuria iš 2 pusių, o kauliukas — bet kuria iš 6 sienų, tai iš viso yra

$$2 \cdot 6 = 12$$

skirtingų monetos ir kauliuko atvirtimo galimybių.

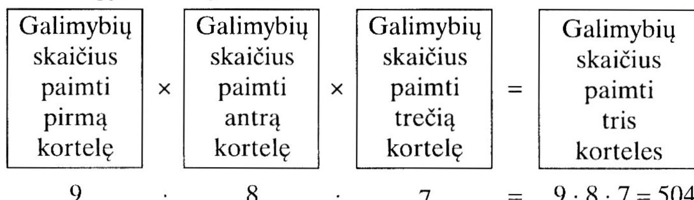
Pagal daugybos taisyklę galima apskaičiuoti galimybių pasirinkti (stebėti) bet kokį daiktų kiekį skaičių.

Pavyzdžiui, ant devynių kortelių parašyti 5 skaičiai ir 4 raidės:



Kortelės užverčiamos, po to atsitiktinai traukiamos trys ir atvertus dedamos viena šalia kitos. Kiek skirtingų kortelių trejetų galima gauti?

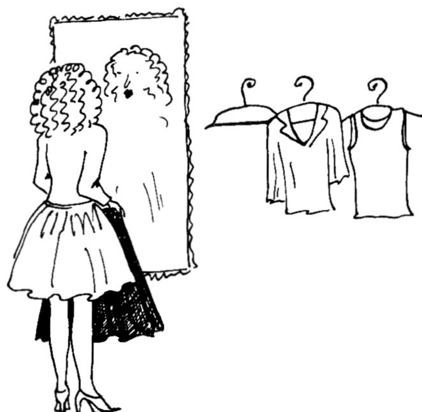
Remiantis daugybos taisykle, turime:



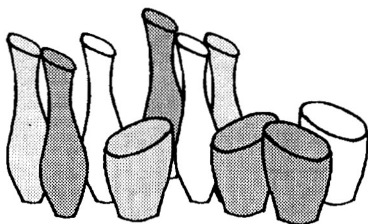
$9 \quad \cdot \quad 8 \quad \cdot \quad 7 \quad = \quad 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

Sutikite, surašyti tiek variantų būtų labai sunku...

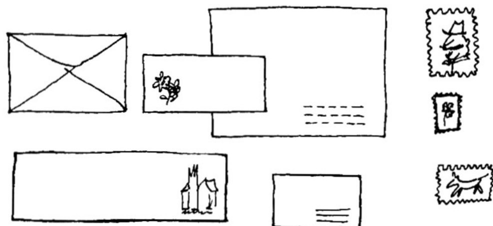
20. Daiva turi juodą bei pilką sijonus ir baltą, raudoną bei mėlyną palaidinukes. Raskite galimų rinkinių iš sijono ir palaidinukės skaičių.



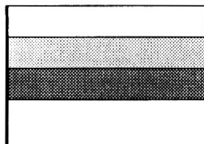
21. Gaminamos vazos, kurios skiriasi arba aukščiu (aukšta, žema) arba spalva (balta, gelsva, žalia, rusva). Taikydami daugybos taisyklę, apskaičiuokite skirtingų vazų skaičių.



22. Spaudos kioske yra penkių rūšių vokai be pašto ženklų ir trijų rūšių pašto ženklai. Keliais būdais galima pasirinkti voką ir pašto ženklą?



23. Kiek skirtingų trispalvių vėliavų su trimis lygiomis horizontaliomis juostomis galima sudaryti iš raudonos, mėlynos ir baltos spalvų?



24. Vienoje lėkštėje yra 5 obuoliai ir 2 apelsinai, o kitoje — 4 obuoliai ir 3 apelsinai. Atsitiktinai paimama po vieną vaisių iš kiekvienos lėkštės.



a) Kelias būdais galima paimti vaisių iš pirmos lėkštės?

b) Kelias būdais galima paimti vaisių iš antros lėkštės?

c) Kelias būdais galima paimti vieną vaisių iš pirmos ir antrą — iš antros lėkštės?

d) Keliais būdais galima pasirinkti du obuolius: vieną iš vienos, o antrą — iš kitos lėkštės?

25. Ant kortelių surašyti visi dviženkliai skaičiai.

a) Kiek iš viso yra kortelių?

Sprendimas. Kortelių yra tiek pat, kiek ir dviženklių skaičių. Dviženkliame skaičiuje yra du skyriai: dešimčių ir vienetų. Dešimčių skyriuje galime užrašyti bet kurį skaitmenį nuo 1 iki 9. Taigi yra 9 galimybės užrašyti dešimčių skaitmenį. Vienetų skyriuje galime užrašyti 10 skaitmenų, t. y. 10 būdų. Pagal daugybos taisyklę yra $9 \cdot 10 = 90$ dviženklių skaičių.

Atsakymas. 90 kortelių.

b) Kiek yra kortelių, kuriose parašyto skaičiaus skaitmenys vienodi?

c) Kiek yra kortelių, kuriose parašyto skaičiaus skaitmenys skirtingi?

26. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 sudaromi triženkliai skaičiai. Taikydami daugybos taisyklę, apskaičiuokite:

a) kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti, jeigu skaitmenys skaičiuje gali kartotis;

Šimtų skaitmens pasirinkimo skaičius	×	Dešimčių skaitmens pasirinkimo skaičius	×	Vienetų skaitmens pasirinkimo skaičius	=	Triženklių skaičių skaičius

b) kiek triženklių skaičių galima sudaryti, jei visi skaičiuje esantys skaitmenys skirtingi;

c) kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti, jeigu skaitmenys skaičiuje nesikartoja ir visų skaičių dešimčių skaitmuo lygus 1;

d) kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti, jeigu skaitmenys skaičiuje nesikartoja, ir sudaromi tik lyginiai triženkliai skaičiai.

27. Kiek yra triženklių skaičių, kurių:

a) skaitmenys gali kartotis;

b) visi skaitmenys vienodi;

c) visi skaitmenys skirtingi?

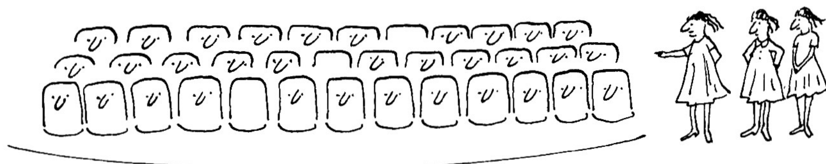
28. a) Kiek yra lyginių triženklių skaičių?
b) Kiek yra nelyginių triženklių skaičių?

29. Kiek yra keturženklių skaičių, kurie dalūs:

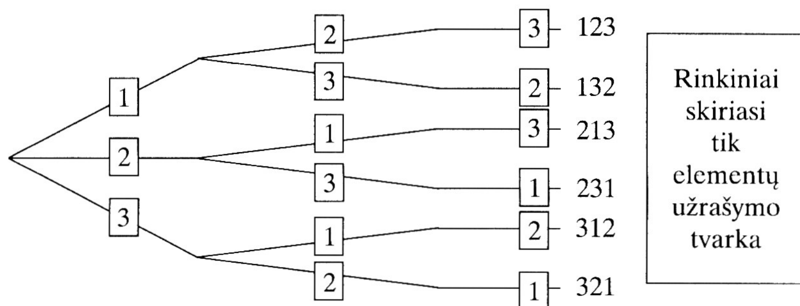
a) iš 2; b) iš 5?

1.5. Elementų tvarka rinkinyje ir daugybos taisyklės taikymas

1 PAVYZDYS. Onutė, Marytė ir Jovita atėjo į kino teatro salę pasiklausyti rinkiminių debatų. Salėje buvo likusios tik trys laisvos vietos: pirmoje (1), antroje (2) ir trečioje (3) eilėje. Keliais skirtingais būdais mergaitės galėjo atsisėsti į tas vietas?

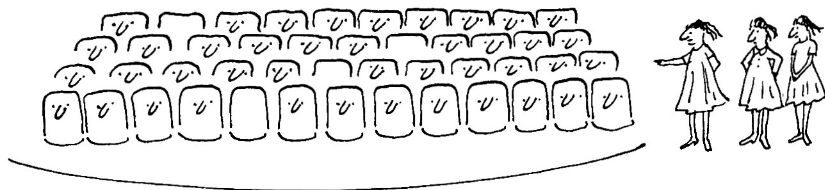


Nusibraižykime galimybių medį ir surašykime galimus variantus trijų elementų rinkiniais:

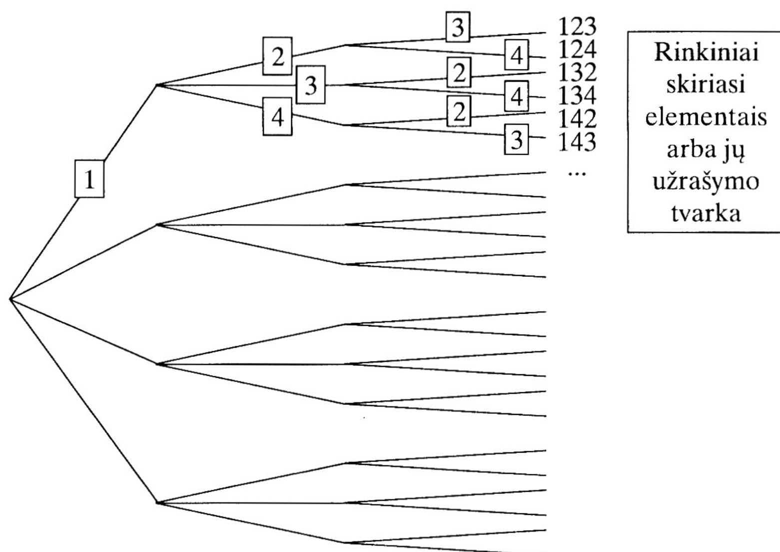


Pirmoji mergaitė gali rinktis bet kurią iš 3 vietų	×	Antroji mergaitė gali rinktis vietą iš likusių 2 vietų	×	Trečiajai mergaitei lieka 1 vieta	=	Mergaičių susėdimų skaičius
3		2		1		6

2 PAVYZDYS. Trys mergaitės atėjo į kino teatro salę pasiklausyti kandidatų į valdžią pažadų. Salėje buvo likusios keturios laisvos vietos: pirmoje (1), antroje (2), trečioje (3) ir ketvirtoje (4) eilėje. Keliais skirtingais būdais mergaitės gali atsisėsti į tas vietas?

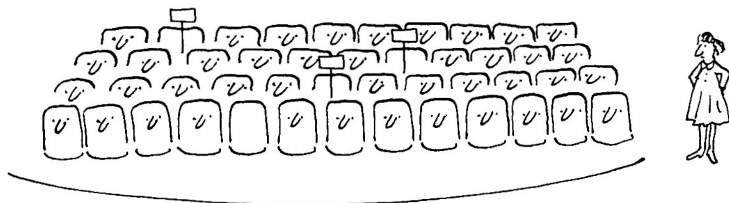


Nusibraižykime galimybių medį ir surašykime galimus trijų elementų, paimtų iš keturių elementų, rinkinius:



Pirmos mergaitės galimybių atsisėsti skaičius	×	Antros mergaitės galimybių atsisėsti skaičius	×	Trečios mergaitės galimybių atsisėsti skaičius	=	Mergaičių susėdimų skaičius
4		3		2		24

3 PAVYZDYS. Onutė atėjo į kino teatro salę pasiklausyti priešrinkiminio koncerto. Salėje buvo tik 4 laisvos vietos. Onutė sau ir savo dviem draugėm užėmė 3 laisvas vietas (iš 4). Keliais būdais ji tai galėjo padaryti?



Remiantis antrojo pavyzdžio samprotavimais, yra 24 variantai susėsti trims mergaitėms keturiose skirtingose vietose. Tačiau šiuo atveju mums visai nesvarbu, kokia tvarka mergaitės susės, t. y. rinkiniai 123, 132, 213, 231, 312, 321 žymi tą pačią situaciją: mergaitės sėdės 1, 2 ir 3 eilėse.

Analogiškai samprotaudami gauname, kad išrašytų rinkinių skaičių reikia sumažinti 6 kartus, nes tiek yra būdų tris elementus sukeisti vietomis. Taigi bus tik 4 skirtingi variantai:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{24}{6} = 4.$$

Jei susitarsime elementus rinkinyje rašyti didėjimo tvarka, tai gausime tokius rinkinius: 123, 124, 134, 234.

Taigi rinkinių, kurie skyrėsi arba elementais, arba jų tvarka (2 pvz.), skaičių padaliję iš skaičiaus rinkinių iš tų pačių elementų, kurie skiriasi tik tvarka (1 pvz.), gausime skaičių rinkinių, kurie skiriasi elementais.

RINKINIAI — *KUO SKIRIASI RINKINIAI*

AB	AC	BC
BA	CA	CB

← Arba elementais, arba tik jų tvarka

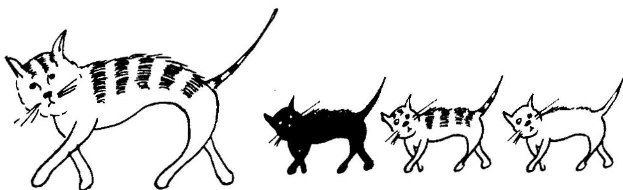
AB	AC	BC

← Elementais

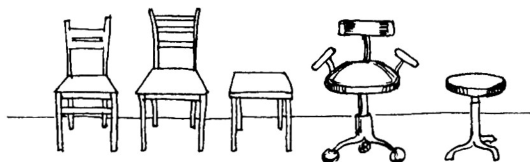
30. Atelje mezgamos 4 modelių kepurės, 2 modelių pirštinės ir 5 modelių šalikai. Kiek yra galimybių užsisakyti kepurę, pirštines ir šaliką?



31. Katė atsivedė tris kačiukus. Kiek yra galimybių pavadinti kačiukus trim skirtingais vardais: Leopoldu, Pūkiu, Murkiu?



32. Keliais būdais 5 žmonės gali atsisėsti ant 5 kėdžių, sustatytų į vieną eilę?



33. Kiek yra galimybių sudaryti vienos dienos šešioms skirtingoms pamokoms tvarkaraštį „be langų“?

34. Aštuoni žmonės nori nusipirkti autobuso bilietus. Kiek yra skirtingų variantų jiems sustoti į vieną eilę?



35. Mokykloje veikia penki būreliai. Mokinys nutarė lankyti du būrelius. Kiek yra pasirinkimo variantų?

36. Keliais būdais Deimantė gali išsirinkti 2 knygas iš 4 siūlomų knygų?

37. Yra šeši skirtingų spalvų pieštukai. Keliais būdais du vaikai gali pasidalyti po tris pieštukus?

38. Kotryna gali apsivilkti 4 skirtingais apdarais ir pasipuošti 4 skirtingais papuošalais:

Apranga	Papuošalai
Suknelė	Sagė
Palaidinė ir sijonas	Karoliai
Megztinis ir kelnės	Grandinėlė
Kostiumėlis	Skarelė

a) Kiek yra skirtingų aprangos ir papuošalo pasirinkimo būdų?

b) Kotryna įsitikinusi, kad skarelė netinka prie palaidinės ir sijono. Keliais būdais ji gali pasirinkti aprangą ir papuošalą?

c) Į kelionę Kotryna nusprendė pasiimti suknelę bei kostiumėlį ir visus papuošalus. Kelis vakarus ji gali skirtingai atrodyti, jei kas vakarą prie aprangos pasipuoš vienu iš papuošalų?

1.6. Pasitikrinkite, ko išmokote

39. Trijose eilutėse buvo parašyti 5 žodžiai. Padėkite skiemenims sugrįžti į savo vietas žodžiuose:

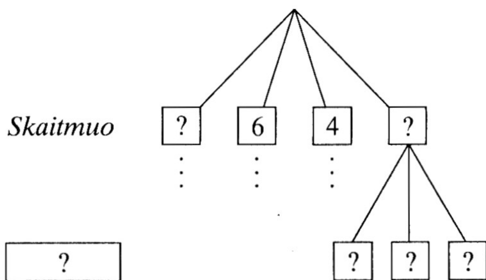
1				☒	☒	☒	☒	☒
2			☒			☒	☒	☒
3					☒			

sche
me my ma
ki džio lė nys rin
len li
nys te bių ga

40. Užrakto kodą sudaro skaitmuo ir raidė. Kodui sudaryti buvo paimti skaitmenys 2, 4, 6, 8 ir raidės A, B, C. Kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų?

a) 2A 2B ?
4A ? 4C
6A 6B ?
8A ? 8C

b)



c)

	A	B	C
?	2A	?	?
?	4A	?	?
?	6A	6B	6C
?	8A	?	?

41. Užrakto kodą sudaro penki ženklai: pirmieji du ženklai yra skaitmenys, kiti trys — raidės, pavyzdžiui: | 0 | 8 | a | p | t |. Kodui sudaryti vartojame 10 skaitmenų ir 23 raides. Taikydami daugybos taisyklę apskaičiuokite:

a) kiek skirtingų kodų gali būti, jei kodo skaitmenys ir raidės nesikartoja;

b) koks būtų kodų skaičius, jei tartume, kad skaitmenys gali kartotis, o raidės — ne.

42. Keliais būdais 4 žmonės gali sustoti į vieną eilę?

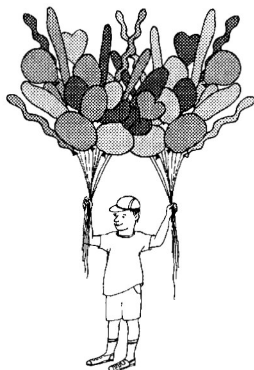
43. Mokykloje veikia 7 būreliai. Rimantė nutarė lankyti du būrelius. Kiek yra pasirinkimo variantų?

44. Kiek yra skirtingų triženklių skaičių, kurių:

a) visi skaitmenys skirtingi;

b) visi skaitmenys — lyginiai skaičiai?

45. Berniukas nusipirko du komplektus spalvotų balionų. Pirmame komplekte buvo 10 raudonų, 6 žali ir 4 mėlyni balionai, o kitame — 2 raudoni, 7 žali ir 11 mėlynų balionų.



a) Kiek yra galimybių paimti du raudonus balionus: vieną — iš pirmo, o antrąjį — iš antro komplekto?

b) Kiek yra galimybių paimti du balionus: vieną — iš pirmo, o antrąjį — iš antro komplekto?

c) Kiek yra galimybių paimti du balionus: raudoną — iš pirmo, o žalią — iš antro komplekto?

d) Kiek yra galimybių paimti du balionus: vieną — iš pirmo, o antrąjį — iš antro komplekto taip, kad vienas balionas būtų raudonas, o kitas — kitos spalvos?

46. PROBLEMŲ SPRENDIMAS

Prisiminkime skyrelio pradžioje iškeltą problemą.

Domino kauliuką sudaro du langeliai. Kiekviename langelyje pažymėtos akutės — jų gali būti 1, 2, 3, 4, 5, 6 arba nė vienos.

a) *Keli kauliukai yra visų domino kauliukų komplekte?*

b) *Domino kauliukų komplektas sudėtas į stačiakampį. Tušti domino langeliai pažymėti 0, o langeliai su akutėmis — atitinkamu jų skaičiumi. Kai kurie kauliukai guli vertikaliai, o kai kurie — horizontaliai. Du kauliukai jau pažymėti. O kur yra kiti?*

1	4	3	6	3	2	5
4	4	2	6	4	3	0
1	0	1	4	3	5	5
5	1	**5**	6	3	2	3
0	3	**5**	0	0	4	5
4	5	6	0	0	3	2
1	6	6	2	1	1	4
2	2	6	1	2	0	6

Kad būtų lengviau, surašykite visas skaičių poras atitinkančias domino kauliukus:

......................., | 1 | 5 |, ..., | 5 | 5 |, ...

2 TIKIMYBĖS

Turinys

Pagrindinės sąvokos:

Bandymas (tikimybinis bandymas), bandymo baigtis (įvykis), baigčių aibė, baigties (įvykio) santykinis dažnis, būtinas įvykis, negalimas įvykis, įvykiui priešingas įvykis, įvykio tikimybė.

Išmokęs skyrių, gebėsi:

- užrašyti bandymo baigčių aibę;
- nustatyti, kuri baigtis iš dviejų ar kelių baigčių yra labiau (mažiau) tikėtina, taikyti šias sąvokas paprasčiausiems uždaviniams spręsti;
- nustatyti visų bandymo baigčių skaičių remiantis galimybių medžiu, galimybių lentele ar sąrašu arba taikant daugybos taisyklę;
- apskaičiuoti įvykio santykinį dažnį ir juo įvertinti įvykio tikimybę, kai bandymas kartojamas daug kartų;
- apskaičiuoti įvykių tikimybes pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą;
- skirti būtinus, negalimus įvykius;
- atpažinti įvykiui priešingą įvykį, apskaičiuoti jo tikimybę.

Problema:

Tėtis paragino savo tris sūnus susitvarkyti kambarį. Šie susiginčijo, kurio eilė. Tuomet tėtis pasiūlė nuo šios dienos tvarkyti kambarį tokia eilės tvarka. Kasdien vienu metu mesti dvi monetas: jeigu atvirs abu skaičiai, tai tvarkys vyriausias, jeigu abu herbai, tai — jauniausias, o jeigu skaičius ir herbas, tai — vidurinysis.







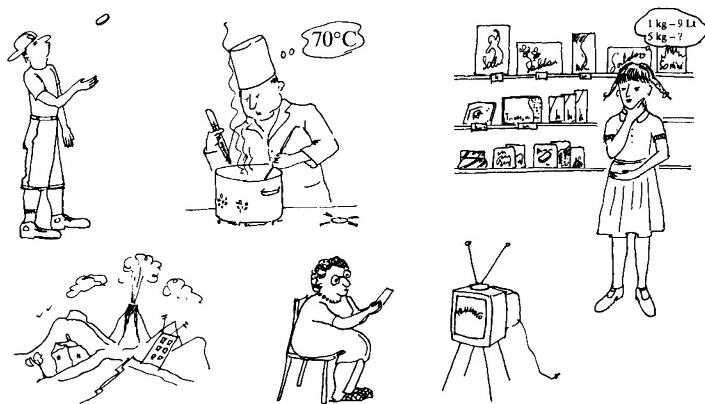




Ar laikydamiesi šios taisyklės broliai tvarkys kambarį vienodai dažnai?

2.1. Tikimybinis bandymas

Žmonės nuolat bando numatyti įvairius įvykius: kiek reikės mokėti už 5 kg saldainių; ar bus žemės drebėjimas; ar laimės nusipirktas loterijos bilietas; ar metus monetą atvirs herbas ir pan.



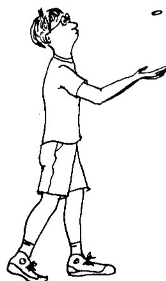
Vienų įvykių pasirodymas gana nesunkiai gali būti iš anksto prognozuojamas, nes gali būti nusakytas gana griežtais dėsningumais. Pavyzdžiui, jei žinome 1 kg saldainių kainą, tai galime apskaičiuoti, kiek pinigų sumokėsime už 5 kg saldainių. Arba jeigu kaitinsim vandenį, tai sulauksime, kad pasiekęs tam tikrą temperatūrą, jis užvirs.

O jeigu rasime pamestą monetą, tai ar ji bus atvirtusi skaičiumi? Sutikime — tai atsitiktinis, iš anksto nenuspėjamas įvykis (baigtis, stebimas rezultatas). Niekada iš anksto nesame tikri, kuria puse atvirtusią monetą rasime. Arba, pirkdami loterijos bilietą, ar esame garantuoti, kad jis bus laimingas? Kažin. Su tokiais ir panašiais atsitiktiniais įvykiais susiduriama kasdien.

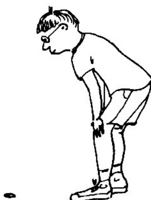
Tačiau pasirodo, kad ir atsitiktiniai įvykiai paklūsta tam tikriems dėsningumams. Šiuos dėsningumus nagrinėja tikimybių teorija. Ji domisi tokiomis situacijomis, kurios gali būti pakartotos tomis pačiomis sąlygomis bet kiek kartų, ir niekada iš anksto nežinoma, koks bus konkretus rezultatas (baigtis) kaskart, kai ji bus pakartota. Tokias situacijas matematikai vadina tikimybiniais bandymais (arba tiesiog bandymais).

Kiekvieną bandymą sudaro tai, kas atliekama, ir tai, kas stebima.

Bandymo pavyzdys:



Metama moneta



Stebima, kuria puse moneta atvirto

Kokių rezultatų galima laukti, atlikus šį bandymą (kokios galimos šio bandymo baigtys)?





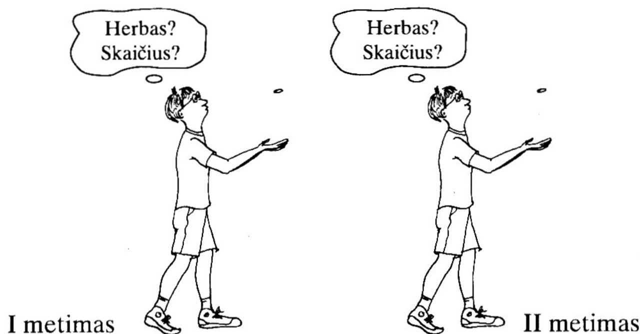
Moneta gali atvirsti arba skaičiumi, arba herbu. Taigi šis bandymas turi dvi *baigtis*: „moneta atvirto skaičiumi“ ir „moneta atvirto herbu“. Tiek skaičiaus, tiek herbo atvirtimas yra atsitiktinis, nes negalime būti tikri, kuria puse moneta atvirs, atlikus bandymą.

Bandymo baigtis patogu pažymėti ženklais: raidėmis, skaičiais ir kt. Pavyzdžiui, baigtį „moneta atvirs herbu“ galima žymėti raide H, o baigtį „moneta atvirs skaičiumi“ — raide S.

Visas galimas bandymo baigtis rašysime riestiniuose skliaustuose. Pavyzdžiui, bandymo „metama moneta ir stebima, kuria puse ji atvirto“ visas baigtis užrašysime taip: {S, H}.

Kai turime sudėtingesnius bandymus, atliekamus su keletu daiktų (ar su tuo pačiu daiktu, tačiau keletą kartų), tai tokio bandymo baigtis patogu žymėti kelių ženklų (elementų) rinkiniais.

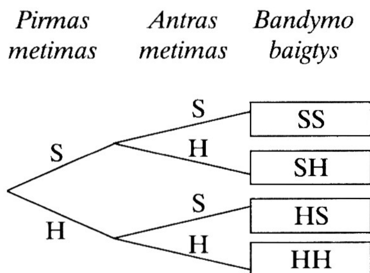
Bandymo pavyzdys: *Moneta metama du kartus ir stebima, kuria puse ji atvirsta kiekvieną kartą.*



Kokių rezultatų galima laukti atlikus šį bandymą?

Moneta pirmą kartą galėjo atvirsti arba skaičiumi (S), arba herbu (H). Antrą kartą moneta irgi galėjo atvirsti arba skaičiumi, arba herbu. Vadinasi, šio bandymo visos galimos baigtys yra: {SS, SH, HS, HH}.

Visas bandymo baigtis galima surašyti braižant *galimybių medį* arba sudarant *galimybių lentelę*:



I \ II	S	H
S	SS	SH
H	HS	HH

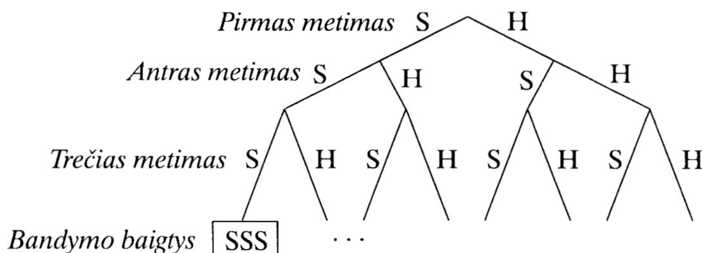
Taigi iš viso yra 4 šio bandymo baigtys.

Tačiau bandymo baigčių skaičių galima apskaičiuoti ir remiantis daugybos taisykle. Suformuluokime ir pritaikykime daugybos taisyklę pavyzdyje aprašyto bandymo baigčių skaičiui apskaičiuoti:

Pirmo atvirtimo galimybių skaičius	×	Antro atvirtimo galimybių skaičius	=	Abiejų avirtimų galimybių skaičius
2	·	2	=	4

Užduotis. Moneta metama tris kartus ir stebima, kuria puse ji kiekvieną kartą atvirto.

Šiuo atveju kiekvieną baigtį patogu žymėti raidžių trejetu. Kad „pamatytume" baigtis, į pagalbą pasitelkime *galimybių medį*:



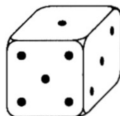
a) Surašykite visas bandymo baigtis: {SSS, SSH, SHS, ...}.

b) Suformuluokite ir pritaikykite daugybos taisyklę šio bandymo baigčių skaičiui apskaičiuoti.

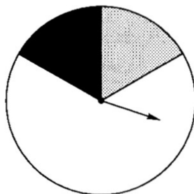
c) Surašykite bandymo baigtis, kai moneta metama 4 kartus. Kiek yra šio bandymo galimų baigčių?

47. Surašykite nurodyto bandymo visas baigtis (prieš tai susitarkite, kaip žymėsite baigtis):

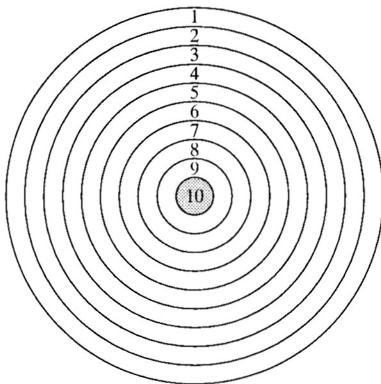
a) Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir stebima, kuriuo akučių skaičiumi jis atvirs.



b) Įsukamas žaidimo ratas ir stebima, kokios spalvos (baltos, pilkos ar juodos) sektoriuje sustoja rodyklė.



c) Šaunama į taikinį ir stebima, į kurį sektorių pataikoma.



48. Sugalvokite bandymą, jei žinoma, kad jo baigtys yra:

a) {„Ištrauktas laimingas bilietas", „Ištrauktas tuščias bilietas"};

b) {„Iš dėžės paimtas obuolys", „Iš dėžės paimta kriaušė", „Iš dėžės paimtas apelsinas"};

c) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

49. Tuo pat metu metamos dvi skirtingos monetos ir stebima, kuria puse atvirto kiekviena moneta. Pažymėję kiekvieną baigtį dviejų raidžių rinkiniu, užrašykite bandymo galimų baigčių aibę.



50. Metama moneta ir šešiasienis lošimo kauliukas. Stebima, kuria puse į viršų atvirto moneta ir kauliukas. Visas bandymo baigtis surašykite braižydami galimybių medį.

51. Metami du skirtingų spalvų šešiasieniai lošimo kauliukai ir stebimos atvirtusių akučių skaičių poros (x; y). Užpildykite lentelę:

	1	2	3	4	5	6
1	(**1**; 1)	(**1**; 2)				
2						
3		(**3**; 2)				
4						
5	(**5**; 1)					
6						

Kiek iš viso yra šio bandymo baigčių?

52. Šešiasienis lošimo kauliukas metamas du kartus ir užrašoma, kiek akučių kaskart atvirsta. Kiek baigčių turi šis bandymas?

53. Šešiasienis lošimo kauliukas metamas tris kartus ir užrašoma, kiek akučių kaskart atvirsta. Kiek baigčių turi šis bandymas?

2.2. Bandymo baigties tikėtinumas

Atkarpų ilgius galima matuoti centimetrais, talpą — litrais, masę — kilogramais, temperatūrą — laipsniais ir t. t. Bandymo baigties tikėtinumą taip pat galima išmatuoti. Baigties tikėtinumo matas — *tikimybė*, t. y. tam tikras skaičius, nusakantis tos baigties pasirodymo galimybę, kai bandymas kartojamas daug kartų.

Panagrinėkime pavyzdį.

Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir stebimas atvirtusių akučių skaičius. Kokiu skaičiumi galima būtų nusakyti vienos sienos atvirtimo tikėtinumą?

Ieškodamas atsakymo į šį klausimą, mokinys nusprendė mesti šešiasienį lošimo kauliuką 250 kartų ir pažiūrėti, kurią visų metimų dalį sudarys vienos akutės atvirtimai po 50, 100, 150, 200, 250 metimų.

BAIGTIES SANTYKINIS DAŽNIS =

$$= \frac{\text{Kiek kartų pasirodė baigtis (baigties pasirodymo dažnis)}}{\text{Kiek kartų pakartotas bandymas (imties dydis)}}$$

Pasirodė, kad po 50 metimų baigties „iškrito 1 akutė“ santykinis dažnis buvo $\frac{8}{50} = 0{,}16$, po 100 metimų — $\frac{18}{100} = 0{,}18$, po 150 metimų — $\frac{24}{150} = 0{,}16$, po 200 metimų — $\frac{34}{200} = 0{,}17$, po 250 metimų — $\frac{42}{250} = 0{,}168$.

Mokinys pastebėjo, kad kuo ilgiau jis mėtė kauliuką, tuo mažiau svyravo baigties „iškrito 1 akutė“ santykinis dažnis.

Skaičius, nusakantis baigties pasirodymo tikėtinumą, kai bandymas kartojamas labai daug kartų, vadinamas *baigties tikimybe.*

Mokinys susimąstė: nejaugi norėdamas nustatyti baigties „iškrito 2 akutės“ tikimybę, vėl turėčiau daugybę kartų kartoti bandymą? Juk natūralu tikėtis, kad *bet kurio akučių skaičiaus atvirtimas* yra *vienodai tikėtinas*.

Jeigu yra *n vienodai tikėtinų bandymo baigčių*, tai kiekvienos jų pasirodymo tikimybė lygi $\frac{1}{n}$.

Kadangi lošimo kauliukas gali atvirsti bet kuria siena iš šešių, tai 1 akutės atvirtimo tikimybė lygi $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{6} \approx 0{,}168$).

Baigties tikimybę sutarta žymėti **P** raide, skliausteliuose trumpai nurodant baigtį, apie kurios tikimybę kalbama.

Mūsų pavyzdyje užrašas $\mathbf{P}(1) = \frac{1}{6}$ reikštų:

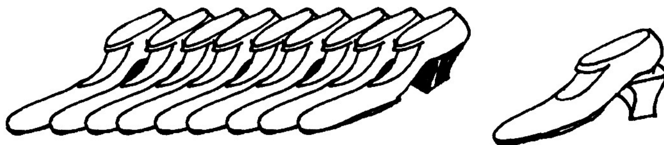
„tikimybė, kad lošimo kauliukas atvirs viena akute, lygi $\frac{1}{6}$“.

Tačiau apibrėžti baigties tikimybę pavyksta ne visuomet. Praktikoje yra daugybė pavyzdžių, kuomet baigties tikimybė įvertinama baigties santykiniu dažniu. Pavyzdžiui, šiuo būdu nustatoma tikimybė pasveikti nuo tam tikros ligos, vartojant atitinkamus vaistus.

UŽDAVINIAI

54. Pasėjus 4000 naujos veislės pomidorų sėklų, po nustatyto laikotarpio išdygo 3501 sėkla. Kurią dalį visų pasėtų sėklų sudaro išdygusios?

55. Atsitiktinai patikrinus 500 naujų vienos rūšies gaminių rasta 10 nekokybiškų. Nekokybiškų tos rūšies gaminių santykiniu dažniu įvertinkite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas tos rūšies gaminys yra nekokybiškas.



56. Tiesioginės televizijos laidos metu į studiją prisiskambino 1000 mokinių, iš kurių 670 pritarė miesto savivaldybės pasiūlymui kasmet rengti savanoriškas mokinių pavasarines aplinkos tvarkymo talkas. Kiek maždaug miesto mokinių iš 100 000 pritartų šiam pasiūlymui?

57. Rita apklausė 100 atsitiktinai sutiktų mokyklos mokinių, ar jie norėtų dėvėti mokyklinę uniformą. 33 mokiniai pasisakė už uniformą.

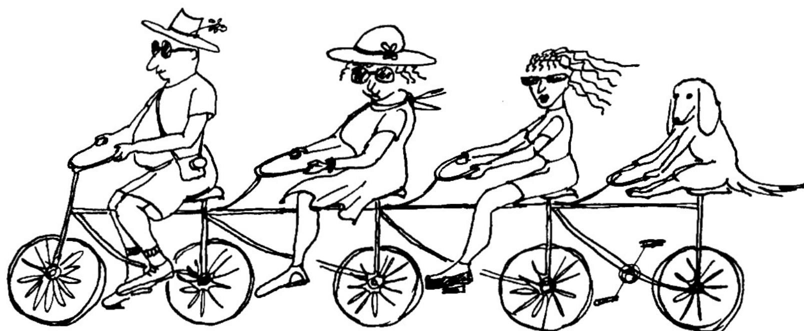
a) Kuri maždaug apklaustųjų dalis pasisakė už uniformą?
A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{4}$

b) Ar galime prognozuoti, kaip balsuotų — už uniformą ar prieš — atsitiktinai sutiktas mokyklos mokinys?

c) Ar galime prognozuoti, kaip balsuotų — už uniformą ar prieš — dauguma mokyklos mokinių?

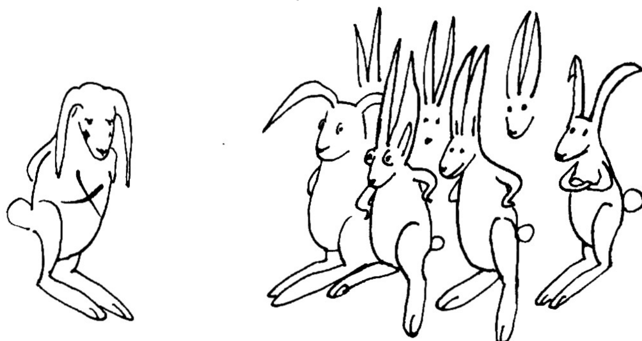
58. Atsitiktinai buvo apklausti 150 vienos mokyklos mokinių, ką jie veikė savaitgalį. 73% apklaustųjų atsakė, kad buvo išvykę. Kiek maždaug mokinių savaitgalį galėjo būti išvykę, jeigu mokykloje yra 1020 mokinių?

59. Kurortinio miesto verslininkas ketina kurti dviračių nuomos punktą. Prieš pirkdamas dviračius, jis apklausė 300 poilsiautojų, ar šie nuomotųsi dviračius. 66 apklaustieji atsakė „taip“. Tuomet verslininkas paskaičiavo, kad 22 procentai apklaustųjų norėtų važinėtis dviračiais. „Jeigu kurortiniame miestelyje vienu metu atostogauja apie 2000 poilsiautojų, tai pirksiu apie 440 dviračių“— nusprendė jis.



Paaiškinkite, kaip skaičiavo verslininkas, ir pagalvokite, ar jis teisus.

60. Norint apskaičiuoti, kiek kiškių yra Maurų girioje, rugpjūtį buvo atsitiktinai pagauti ir paženklinti 686 kiškiai. Rugsėjį toje pačioje girioje buvo pagauta 400 kiškių, iš kurių 54 buvo paženklinti.

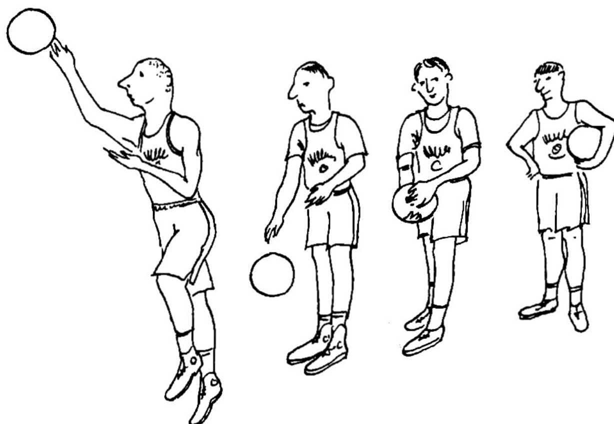


a) Kiek maždaug kiškių yra Maurų girioje?

b) Įvertinkite tikimybę, kad atsitiktinai šioje girioje pagautas kiškis bus paženklintas.

61. Keturi krepšininkai po 80 kartų metė kamuolį į krepšį. Kiekvieno žaidėjo įmestų kamuolių skaičiaus santykinis dažnis yra: Andriaus — $\frac{7}{10}$, Broniaus — $\frac{1}{2}$, Jono — $\frac{13}{20}$, Domo — $\frac{3}{5}$. Kuris žaidėjas taikliausias?

A Andrius **B** Bronius **C** Jonas **D** Domas



62. GRUPINIS DARBAS

Jau įsitikinome, kad metant nesulankstytą simetrišką monetą vienodai tikėtina, kad atvirs skaičius ir kad atvirs herbas. O dabar, monetą pakeiskime smeigtuku:



Smeigtuko viena pusė lygi, o kitoje pusėje yra kojelė. Tikriausiai metant smeigtuką *nėra vienodai tikėtina*, kad smeigtukas atvirstų plokščiąja puse ir kad atvirstų kojele.

Darbo eiga:

- Pasidalykite į keturias grupes.

  Kaip jums atrodo, kuria puse atvirsti smeigtukui šansai yra didesni? O gal jie lygūs? Pabandykite nustatyti, kokiu skaičiumi galėtų būti nusakomas smeigtuko atvirtimo plokščiąja puse tikėtinumas.
- Kiekvienoje grupėje meskite smeigtuką 150–200 kartų. Registruokite, kuria puse atvirsta smeigtukas. Apskaičiuokite, kurią visų metimų dalį sudarė plokščiosios pusės atvirtimai (0,1 tikslumu).
- Palyginkite grupėse gautus rezultatus bei padarykite išvadą.

2.3. Bandymo įvykio tikėtinumas

Bandymas:

Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir stebimas atvirtusių akučių skaičius.

Šis bandymas turi 6 vienodai tikėtinas baigtis: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Tarkime mus domina toks su šiuo bandymu susijęs įvykis: „atvirto lyginis akučių skaičius“. Šis įvykis įvyks, jei atvirs 2, 4 arba 6 akutės. Sakysime, kad šiam įvykiui yra palankios 3 baigtys (iš 6).

Lentelėje pateikta daugiau su šiuo bandymu susijusių įvykių:

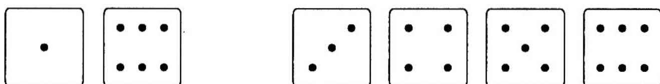
Įvykis	Įvykiui palankios baigtys	Palankių Baigčių skaičius
Atvirto lyginis akučių skaičius	2, 4, 6	3
Atvirto 1 arba 6 akutės	1, 6	2
Atvirto pirminis akučių skaičius	2, 3, 5	3
Atvirto ne viena ir ne dvi akutės	3, 4, 5, 6	4

Įvykis „atvirto lyginis akučių skaičius“ *vienodai tikėtinas* kaip ir įvykis „atvirto pirminis akučių skaičius“, nes lygūs tiems įvykiams palankių baigčių skaičiai (3 = 3).



Įvykis „atvirto lyginis akučių skaičius“ *labiau tikėtinas* nei įvykis „atvirto 1 arba 6 akutės“, nes 3 > 2.

Įvykis „atvirto 1 arba 6 akutės“ *mažiau tikėtinas* nei įvykis „atvirto ne viena ir ne dvi akutės“, nes 2 < 4.



Įvykis „atvirto ne viena ir ne dvi akutės“ *labiausiai tikėtinas* iš išvardytų įvykių.

Iš dviejų įvykių labiau tikėtinas tas, kuriam įvykti yra daugiau palankių vienodai tikėtinų baigčių.

Lentelėje pateikti dar du su aprašytu bandymu susiję įvykiai:

Įvykis	Įvykiui palankios baigtys	Įvykiui palankių baigčių skaičius
Atvirtusių akučių skaičius mažesnis už 7	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
Atvirtusių akučių skaičius didesnis už 6	—	0

Tai ypatingų įvykių pavyzdžiai.

Įvykiui „atvirtusių akučių skaičius didesnis už 6“ palankių baigčių skaičius lygus nuliui (šis įvykis negali įvykti, nes nėra jam palankių baigčių).

Įvykis, kuriam nėra palankių baigčių, vadinamas negalimuoju.

Įvykiui „atvirtusių akučių skaičius mažesnis už 7“ palanki bet kuri bandymo baigtis.

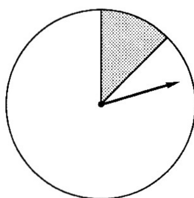
Įvykis, kuriam palankios visos baigtys, vadinamas būtinuoju.

Kasdienėje kalboje bandymo baigčių tikėtinumui nusakyti naudojami šie žodžiai ir frazės:

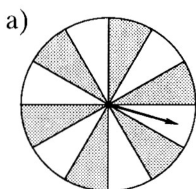
Mažai šansų ⟵⟶ Daug šansų

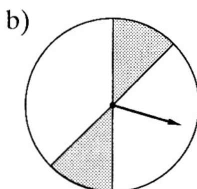
Niekada Jokių šansų Neįmanoma Negalima	Kartais Mažai šansų Mažai galimybių Mažai tikėtina Vargu ar įvyks Beveik neįmanoma	Lygūs šansai Lygiai galimi Panašūs šansai Vienodai tikėtina	Daug galimybių Daug šansų Beveik garantuotai Labai tikėtina Tikriausiai	Būtinai Tikrai Garantuotai Visada

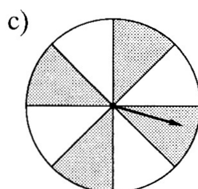
63. Įsukama rodyklė ir stebima, kokios spalvos sektoriuje – pilkos ar baltos ji sustoja:



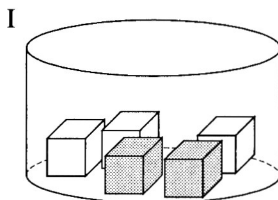
Akivaizdu, kad pilkos spalvos sektorius užima mažesnę skritulio dalį nei baltos. Kuo pilkas sektorius mažesnis, tuo mažiau šansų rodyklei jame sustoti. Taigi baigtis „rodyklė sustos pilkame sektoriuje" mažiau tikėtina negu baigtis „rodyklė sustos baltame sektoriuje". Pasvarstykite, kurioje srityje rodyklei sustoti yra daugiau šansų: baltoje ar pilkoje?

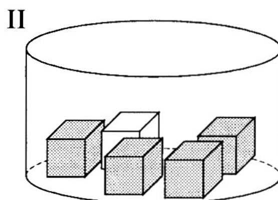
a) 

b) 

c) 

64. Dviejose dėžėse yra šviesios ir tamsios vienodo dydžio kaladėlės:

I 

II 

a) Iš pirmos dėžės traukiama viena kaladėlė ir stebima, ar ji šviesi, ar tamsi. Šviesią ar tamsią kaladėlę mažiau tikėtina ištraukti?

b) Iš kiekvienos dėžės traukiama po vieną kaladėlę ir stebima, ar ji šviesi, ar tamsi. Iš kurios dėžės ištraukti tamsią kaladėlę labiau tikėtina?

65. 9 vaikai keičiasi dovanėlėmis. Ant vienodų popieriaus lapelių surašomi vaikų vardai. Kiekvienas nežiūrėdamas traukia lapelį. Kas labiau tikėtina: ištraukti savo vardą ar paties geriausio klasės draugo vardą?

66. Ant stalo padėtos penkios užverstos kortelės su skaičiais:

3	13	103	33	303

Atsitiktinai traukiama viena kortelė ir stebima, kelių ženklų skaičius ten užrašytas. Palyginkite tikėtinumą baigčių: „ištraukta kortelė su vienaženkliu skaičiumi“, „ištraukta kortelė su dviženkliu skaičiumi“ ir „ištraukta kortelė su triženkliu skaičiumi“.

67. Iš 20 rutuliukų vienas geltonas. Nežiūrint traukiamas vienas rutuliukas. Kurį teiginį jūs laikote teisingu:

A Vieną kartą traukiant neįmanoma ištraukti geltoną rutuliuką

B Vieną kartą traukiant įmanoma ištraukti geltoną rutuliuką

C Vieną kartą traukiant, įvykių „ištraukti geltoną rutuliuką“ ir „neištraukti geltoną rutuliuką“ šansai vienodi

68. Maišelyje yra saldainiai „Nykštukas“. Pusė jų — su raudonais popierėliais, penktadalis — su mėlynais, likusieji — su geltonais. Nežiūrint imamas vienas saldainis. Su kokiu popierėliu saldainį paimti mažiausiai tikėtina?

A Su raudonu **B** Su mėlynu **C** Su geltonu

69. Į dėžutę metamas rutuliukas. Su vienodomis tikimybėmis jis gali sustoti bet kuriame iš keturių dugno sektorių:

1	2	3	4

Nagrinėjami įvykiai:

A — rutuliukas sustoja pirmame sektoriuje;

B — rutuliukas sustoja pirmame arba antrame sektoriuje;

C — rutuliukas nesustoja ketvirtame sektoriuje;

D — rutuliukas sustoja viename iš sektorių;

E — rutuliukas sustoja kiekviename sektoriuje.

a) Surašykite visas bandymo baigtis.

b) Surašykite kiekvienam nagrinėjamam įvykiui palankias baigtis.

c) Kuris iš įvykių būtinas?

d) Kuris iš įvykių negalimas?

e) Kuris iš įvykių mažiausiai tikėtinas?

f) Kuris iš įvykių labiausiai tikėtinas?

2.4. Klasikinis tikimybės apibrėžimas

Apibrėžti galima ne tik vienodai galimų baigčių tikimybes, bet ir tikimybes įvairių įvykių, susijusių su tuo bandymu. Įvykių, kaip ir baigčių, tikimybės žymimos raide **P**, skliausteliuose trumpai nurodant įvykį. Įvykio tikimybė apskaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbf{P}(\text{įvykio}) = \frac{\text{Įvykiui palankių baigčių skaičius}}{\text{Visų vienodai galimų baigčių skaičius}}$$

Panagrinėkime pavyzdį. Metamas standartinis šešiasienis lošimo kauliukas ir stebimas atvirtusių akučių skaičius. Apskaičiuokime tikimybę įvykio, kad atvirto lyginis akučių skaičius.

Galėsime teigti, kad atvirto lyginis akučių skaičius, jeigu atvirs arba 2, arba 4, arba 6 akutės, t. y.

$$\mathbf{P}(\text{lyginis}) = \frac{\text{Įvykiui palankių baigčių skaičius}}{\text{Visų vienodai galimų baigčių skaičius}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Bet

$$\mathbf{P}(\text{lyginis}) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6).$$

Taigi *įvykio tikimybę galima apskaičiuoti ir pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą, ir kaip įvykiui palankių baigčių tikimybių sumą.*

Negalimojo įvykio tikimybė lygi 0, t. y. **P**(negalimojo įvykio) = 0.

Būtinojo įvykio tikimybė lygi 1, t. y. **P**(būtinojo įvykio) = 1.

Visų kitų įvykių tikimybės yra skaičiai didesni už 0, bet mažesni už 1.

Užduotis. Sujunkite įvykį su atitinkama įvykio tikimybe:

ĮVYKIS	TIKIMYBĖ
Būtinas	$\frac{3}{1000}$
Negalimas	$\frac{999}{1000}$
Labai tikėtinas	1
Mažai tikėtinas	0

70. Atsitiktinai pasirenkama viena 2000 m. balandžio mėnesio diena.

BALANDIS

Pirmadienis		3	10	17	24
Antradienis		4	11	18	25
Trečiadienis		5	12	19	26
Ketvirtadienis		6	13	20	27
Penktadienis		7	14	21	28
Šeštadienis	1	8	15	22	29
Sekmadienis	2	9	16	23	30

Raskite tikimybes įvykių:

a) **P**(bus pasirinkta balandžio 5 diena);

b) **P**(bus pasirinkta paskutinės balandžio savaitės diena);

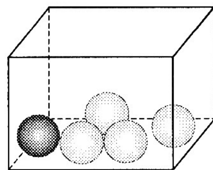
c) **P**(bus pasirinktas pirmadienis);

d) **P**(bus pasirinkta balandžio 31 diena);

e) **P**(bus pasirinkta bet kuri balandžio mėnesio diena).

f) Ar kuris nors iš aukščiau išvardytų įvykių yra būtinas; negalimas?

71. Dėžėje yra dviejų spalvų vienodo dydžio rutuliai: 4 balti ir 1 juodas. Iš dėžės nežiūrint imamas vienas rutulys ir stebima jo spalva. Apskaičiuokite:



a) **P**(baltas);

b) **P**(juodas);

c) **P**(baltas arba juodas);

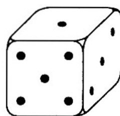
d) **P**(žalias).

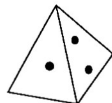
72. Parduota 1000 loterijos bilietų. Iš jų 5 laimingi: vienas — kelionė į Prahą, keturi — atostogos prie jūros. Aš pirkau vieną bilietą. Apskaičiuokite:

a) **P**(laimingas); b) **P**(kelionė į Prahą); c) **P**(kelionė prie jūros).

73. Metami du kauliukai: šešiasienis ir ketursienis (jų sienelėse yra atitinkamai nuo 1 iki 6 ir nuo 1 iki 4 akučių). Stebima, kiek akučių yra apatinėse kauliukų sienelėse, t. y. skaičių poros (x, y):

(x, y)	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)





a) Apskaičiuokite:
   P(iškrito vienodi skaičiai);
   P(bent vienas iš šių skaičių didesnis už 4);
   P(abu skaičiai nelyginiai).

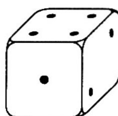
b) Suformuluokite būtiną ir negalimą įvykius.

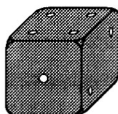
c) Aptarkite klasėje, ar yra vienintelės būtino ir negalimo įvykio formuluotės.

74. Metami du skirtingų spalvų šešiasieniai lošimo kauliukai ir stebimos atvirtusių akučių poros.

1) Nusibraižykite ir užpildykite lentelę:

(x, y)	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						





2) Remdamiesi lentele, apskaičiuokite:

a) **P**(atvirto du ketvertai);

b) **P**(atvirto lygūs skaičiai);

c) **P**(atvirto abu lyginiai skaičiai);

d) **P**(atvirto abu pirminiai skaičiai).

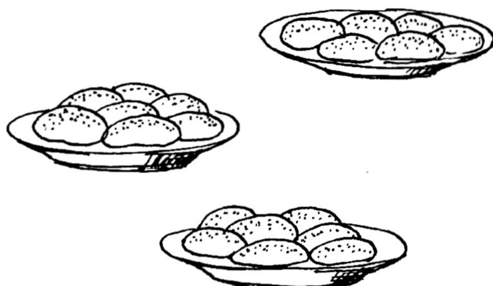
75. Metama moneta ir standartinis šešiasienis lošimo kauliukas. Stebima, kuria puse atvirto moneta ir kiek akučių atvirto. Nusibraižykite baigčių lentelę ir apskaičiuokite:

a) **P**(S, 4); b) **P**(H, lyginis); c) **P**(H, ne 4); d) **P**(S, 7).

76. Žinoma, kad nauji kaimynai turi du vaikus, iš kurių vienas berniukas. Kokia tikimybė, kad abu jų vaikai yra berniukai?

77. Bandelės, kurios skiriasi tik įdaru, sudėtos į tris lėkštes. Lentelėje pateikta, kiek ir kokių bandelių yra kiekvienoje lėkštėje.

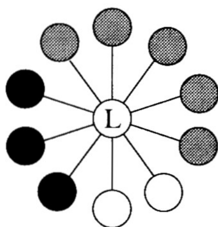
	Lėkštės		
Įdaras	I	II	III
Braškių	3	0	5
Vyšnių	5	10	2
Obuolių	6	3	5
Spanguolių	1	2	3
Iš viso:	15	15	15

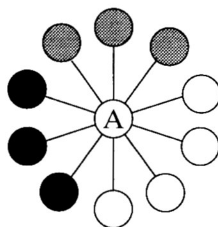


a) Pirmasis bandelę rinksis Ramūnas. Jis paims bandelę iš I-osios lėkštės. Kokia tikimybė, kad jo paimta bandelė bus su vyšnių įdaru?

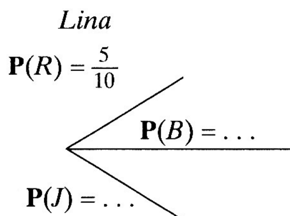
b) Pirmoji bandelę rinksis Sigita. Ji ims bandelę iš bet kurios lėkštės. Kokia tikimybė, kad jos paimta bandelė bus su vyšnių įdaru?

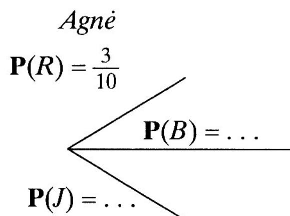
78. Lina ir Agnė nusipirko po dėžutę segtukų plaukams. Linos (L) dėžutėje yra 5 raudoni, 2 balti ir 3 juodi segtukai. Agnės (A) dėžutėje yra 3 raudoni, 4 balti ir 3 juodi segtukai.



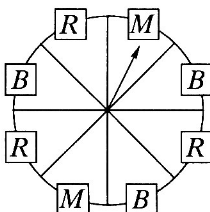


Kiekviena mergaitė iš savo dėžutės nežiūrėdama ima po segtuką. Nurodykite tikimybes, su kuriomis kiekviena mergaitė paims kiekvienos spalvos segtuką:





79. Ratas padalytas į lygias dalis. Vienos dalys nuspalvintos raudonai (R), kitos — mėlynai (M), trečios — baltai (B). Rodyklė pasukama vieną kartą ir stebima, ties kuria spalva ji sustoja.



Apskaičiuokite:

a) **P**(balta); b) **P**(mėlyna); c) **P**(balta arba mėlyna); d) **P**(ne balta).

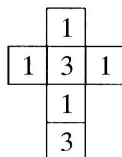
80. Metami du vienodi šešiasieniai lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių suma. Užpildę vienodai galimų baigčių lentelę, apskaičiuokite:

a) **P**(atvirtusių akučių suma lygi 6);

b) **P**(atvirtusių akučių suma — pirminis skaičius);

c) **P**(atvirtusių akučių suma — lyginis skaičius).

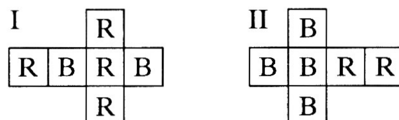
81. Kauliukas, kurio išklotinė pavaizduota piešinyje, metamas du kartus ir sudedami po abiejų metimų pasirodę skaičiai.



a) Nubraižę lentelę parodykite, kad **P**(suma lygi 2) $= \frac{4}{9}$.

b) Apskaičiuokite **P**(suma lygi 4).

82. Vienu metu metami du lošimo kauliukai (pavaizduotos jų išklotinės) ir stebima, kokiomis spalvomis (balta — B ar raudona — R) jie atvirs.



1) Užpildykite lentelę:

	R	R	R	R	B	B
B						
B						
B						
B						
R						
R						

2) Apskaičiuokite:

a) **P**(RR);

b) **P**(BB);

c) **P**(skirtingos spalvos).

83. Virgilijus nežiūrėdamas ima dvi iš pavaizduotų kortelių ir sudeda paimtose kortelėse užrašytus skaičius.

2	4	6	8

Apskaičiuokite tikimybę įvykio:

a) suma — lyginis skaičius;

b) suma — nelyginis skaičius;

c) suma didesnė už 14;

d) suma lygi 10.

84. Du vaikai žaidžia tokį žaidimą: abu po vieną kartą ridena standartinį šešiasienį lošimo kauliuką ir skaičiuoja pasirodžiusių akučių skaičių skirtumo modulį. Jeigu gauta modulio reikšmė yra lyginis skaičius — laimi pirmasis; jeigu nelyginis skaičius — laimi antrasis; jeigu nulis — lygiosios. Nubraižę ir užpildę lenteles, nustatykite, ar abiejų vaikų tikimybės išlošti yra vienodos.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1				
2						4
3						
4						
5	4	3		1		1
6						0

$\lvert x - y \rvert$	Palankių baigčių skaičius	Tikimybė
Lyginis		**P**(lyginis) $= \frac{\dots}{36} = \dots$
Nelyginis		
Nulis		

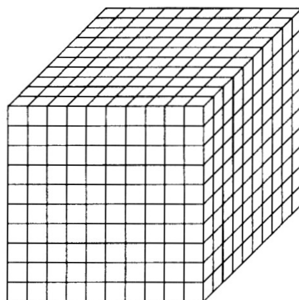
85. Kubas, kurio sienos nudažytos, buvo supjaustytas į 1000 lygių kubelių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtas kubelis:

a) turės vieną nudažytą sieną?

b) turės dvi nudažytas sienas?

c) turės tris nudažytas sienas?

d) neturės nė vienos nudažytos sienos?



86. PRAKTINĖ UŽDUOTIS

Priemonės:

– 10 centų moneta;

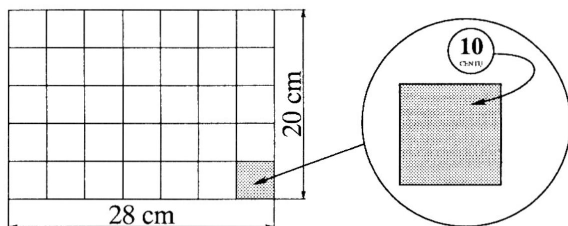
– popieriaus lapas 28 cm × 20 cm;

– liniuotė su padalomis;

– pieštukas.

Pasiruošimas:

Popieriaus lapą padalykite į kvadratėlius 4 cm × 4 cm, kaip parodyta paveiksle:



Tikslas:

Išsiaiškinti, kokia tikimybė, kad atsitiktinai metama moneta užkris ant linijos arba ją lies.

Eiga:

1) Kaip manote, kiek kartų iš 20 metimų moneta užkris ant linijos? (Savo spėjamą rezultatą užrašykite sąsiuvinyje).

2) Dirbkite poromis. Vienas meskite monetą 20 kartų, o kitas žymėkite, kiek kartų ji užkrito ant linijos. Palyginkite rezultatus su savo spėjimais.

3) Tęskite eksperimentą. Apskaičiuokite monetos užkritimo ant linijos santykinius dažnius po 40, 80, 120 metimų. Prie kokio skaičiaus artėja santykinio dažnio reikšmės, didinant metimų skaičių? Palyginkite savo rezultatus su kitų rezultatais, padarykite išvadą.

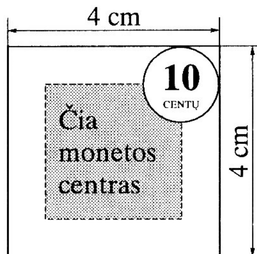
Galite tęsti eksperimentą, kol monetos užkritimo ant linijos santykinis dažnis stabilizuosis (mažai besikeis) — tuomet jį galėsime laikyti ieškoma tikimybe. Čia jūsų tyrimas baigsis.

Tačiau, jeigu pabodo eksperimentuoti (iš tiesų, kiek gi galima mėtyti monetą?), *galite apskaičiuoti nagrinėjamo įvykio tikimybę*:

4) Išmatuokite monetos skersmenį ir apskaičiuokite jos spindulį.

5) Supaprastinkime situaciją ir nagrinėkime tik vieną kvadratėlį, laikydami, kad mestos monetos centras bus kvadratėlio viduje.

Nuspalvinkite kvadratėlio sritį, kurioje esant monetos centrui, moneta nedengia kvadratėlio linijų.



6) Apskaičiuokite kvadratėlio plotą, o po to — nuspalvintos dalies plotą.

7) Apskaičiuokite tikimybę, kad monetos centras bus kvadratėlio nuspalvintoje dalyje. Remkitės formule:

$$\mathbf{P}(\text{monetos centras bus kvadratėlio nuspalvintoje dalyje}) =$$
$$= \frac{\text{Plotas figūros, kurioje gali būti monetos centras}}{\text{Viso kvadratėlio plotas}}$$

8) Kokia tikimybė, kad monetos centras bus nenuspalvintoje kvadratėlio dalyje?

9) Įsivaizduokite, kad taip nuspalvinote visus kvadratėlius (aišku, galite taip ir padaryti):

- apskaičiuokite nuspalvintos ir nenuspalvintos dalių plotus;
- raskite santykį:

$$\frac{\text{Nenuspalvintos dalies plotas}}{\text{Viso lapo plotas}}$$

Kokią išvadą galite padaryti?

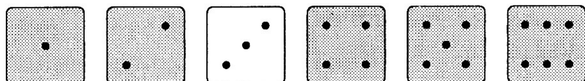
Palyginkite savo skaičiavimus su draugų rezultatais.

2.5. Įvykiui priešingas įvykis

Vaikai dalyvauja loterijoje: po vieną kartą meta šešiasienį lošimo kauliuką ir stebi iškritusių akučių skaičių. Jeigu iškrenta 3 akutės — laimi prizą, priešingu atveju nelaimi nieko. Kokia tikimybė, kad žaidėjas prizo nelaimės?

Apskaičiuokime šią tikimybę dviem būdais.

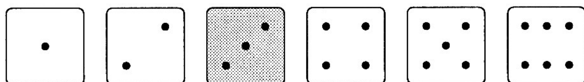
1 būdas. Įvykiui „nelaimėti prizo" yra palankios 5 baigtys iš šešių, t. y. jei iškrenta 1, 2, 4, 5 ar 6 akutės, tai prizas nelaimimas:



Vadinasi,

$$\mathbf{P}(\text{nelaimėti prizo}) = \frac{5}{6}.$$

2 būdas. Apskaičiuokime įvykiui „nelaimėti prizo" priešingo įvykio tikimybę, t. y. apskaičiuokime, kokia tikimybė yra laimėti prizą. Iš 6 vienodai galimų baigčių yra viena baigtis, su kuria laimimas prizas, t. y. jei iškrenta 3 akutės, tai prizas laimimas:



Vadinasi,

$$\mathbf{P}(\text{laimėti prizą}) = \frac{1}{6}.$$

Akivaizdu, kad

$$\mathbf{P}(\text{nelaimėti prizo}) = 1 - \mathbf{P}(\text{laimėti prizą}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Įvykio ir jam priešingo įvykio tikimybių suma lygi 1.

87. Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir stebimas pasirodęs skaičius.

a) Ar įvykis „iškrito skaičius, mažesnis už 3“ priešingas įvykiui „iškrito skaičius, ne mažesnis už 3“?

b) Ar įvykis „iškrito skaičius, didesnis už 3“ priešingas įvykiui „iškrito skaičius, mažesnis už 3“?

c) Raštu suformuluokite įvykius, priešingus įvykiams:
A — iškrito skaičius 5;
B — iškrito skaičius, didesnis už 5;
C — iškrito skaičius, ne mažesnis už 5.

88. Tikimybė pagaminti tam tikros rūšies kokybišką gaminį lygi 0,96. Kokia tikimybė pagaminti tos rūšies nekokybišką gaminį?

89. Metamas kauliukas, kurio išklotinė pavaizduota paveikslėlyje, ir stebimas pasirodęs skaičius:

	1		
7	3	9	9
	5		

Užbaikite pildyti lentelę:

Įvykis	**P**(įvykio)	Priešingas įvykis	**P**(priešingo įvykio)
Iškris 9			
Iškris mažiau negu 9			
Iškris daugiau negu 9			

90. Metami šešiasienis ir ketursienis lošimo kauliukai ir stebimos atvirtusių akučių skaičių poros (x, y).

a) Užbaikite pildyti lentelę:

(x, y)	1	2	3	4	5	6
0	(0, 1)	(0, 2)				
2	(2, 1)	(2, 2)				
4						
6						

b) Kokia tikimybė, kad atvirs skirtingi skaičiai?

2.6. Pasitikrinkite, ko išmokote

91. Pasirinkite tinkamą žodį iš pasiūlytų skliausteliuose:

a) Tikimybinis bandymas gali būti pakartotas tomis pačiomis sąlygomis .... (tik vieną, bet kiek) kartų.

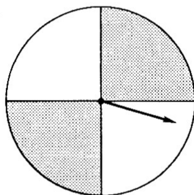
b) Kiekvienas bandymas susideda iš to, kas .... (vyksta, stebima, vyksta ir kas stebima).

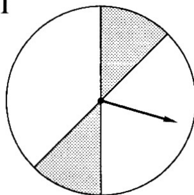
c) Tikimybinis bandymas turi ...... (tik vieną, bent dvi) baigtis.

d) Kiekviena bandymo baigtis — tam tikras iš anksto .... (nenuspėjamas, žinomas) stebėjimo rezultatas, t. y. tai, ką galime pamatyti, ... (kaskart, daug kartų) atlikdami bandymą.

e) Bandymo baigtis padeda pamatyti .... (galimybių medis, daugybos taisyklė).

92. Įsukamas žaidimo ratas ir stebima, kokiame sektoriuje sustoja rodyklė — baltame ar pilkame. Žaidėjas laimi kiekvieną kartą, kai rodyklė sustoja jo pasirinktos spalvos sektoriuje:



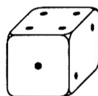


a) Kokios spalvos sektorių kiekvienu atveju pasirinktumėte, jeigu būtumėte žaidėju?

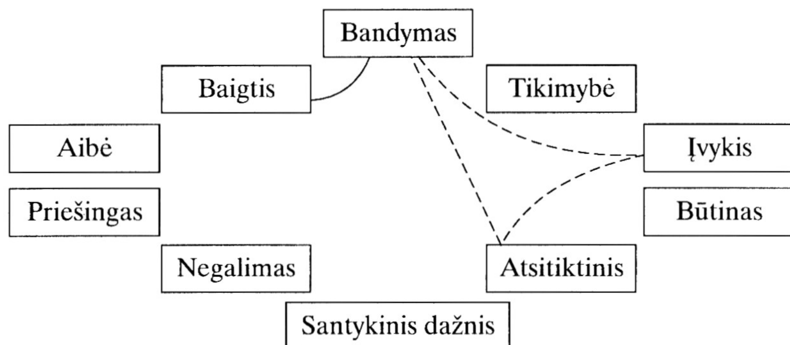
b) Nupieškite žaidimo ratą ir padalykite jį į tris skirtingų spalvų sektorius — baltą, pilką ir juodą taip, kad daugiausiai galimybių išlošti turėtų žaidėjas, pasirinkęs juodą sektorių, o likusių žaidėjų šansai išlošti būtų vienodai galimi.

93. Metamas šešiasienis lošimo kauliukas ir moneta bei stebima, kuria puse jie atvirto. Kiek šis bandymas turi baigčių?





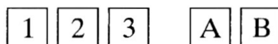
94. „Numegzkite“ kuo tankesnį „voratinklį“, jungdami žemiau esančias sąvokas į poras ar trejetus ir paaiškinkite jų ryšį:



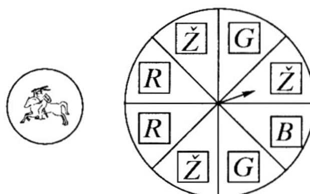
Pavyzdžiai:

RYŠYS	PAAIŠKINIMAS
Bandymas–baigtis	Atliekame bandymą ir stebime jo rezultatą — baigtį.
Atsitiktinis–bandymas–įvykis	Atsitiktinis įvykis toks, kuris atlikus bandymą gali įvykti, o gali ir neįvykti.

95. Yra trys kortelės su skaičiais ir dvi su raidėmis. Imama viena kortelė su skaičiumi ir viena su raide. Užrašykite galimas skaičiaus ir raidės ėmimo baigtis.



96. Metama moneta ir įsukamas suktukas. Stebima, kuria puse atvirsta moneta ir ties kuria spalva sustoja suktukas.



a) Surašykite visas bandymo baigtis.

b) Ar visos bandymo baigtys yra vienodai tikėtinos?

97. Vilius iš dėžės atsitiktinai traukia rutulį, užsirašo jo spalvą ir grąžina rutulį atgal į dėžę. Pakartojus bandymą 400 kartų paaiškėjo, kad 102 kartus jis ištraukė raudonos spalvos rutulį.

a) Apskaičiuokite raudono rutulio traukimo santykinį dažnį.

b) Įvertinkite tikimybę ištraukti raudonos spalvos rutulį:

A Negalime įvertinti, nes nežinome, kiek rutulių yra dėžėje

B $\mathbf{P}(\text{raudonas}) \approx 0{,}25$

C $\mathbf{P}(\text{raudonas}) = \frac{400}{102}$

D $\mathbf{P}(\text{raudonas}) = \mathbf{P}(\text{neraudonas}) = \frac{1}{2}$

E Negalime nustatyti, nes neaišku, kokios spalvos kiti rutuliai

98. Atsitiktinai apklausus vienos mokyklos 150 vyresniųjų klasių mokinių, 68 procentai jų pasisakė už dviračių takų plėtrą mieste. Kiek maždaug iš 750 miesto vyresniųjų klasių mokinių pritartų šiam projektui?

99. Yra šešios supakuotos mašinėlės: 4 mėlynos ir 2 raudonos. Atsitiktinai išpakuojama viena mašinėlė. Apskaičiuokite tikimybę, kad išpakuota raudona mašinėlė.

100. Nerijus ir Milda turi po tris korteles su skaičiais 5, 6, 7. Jie ima po vieną savo kortelę ir sudeda skaičius abiejose kortelėse. Lentelėje parodytos galimos skaičių sumos:

+	**5**	**6**	**7**
5	10	11	12
6	11	12	13
7	12	13	14

a) Kuris iš dviejų įvykių — A ar B labiau tikėtinas (atsakymą pagrįskite):
A — abiejose kortelėse esančių skaičių suma yra lyginis skaičius;
B — abiejose kortelėse esančių skaičių suma yra skaičius, didesnis už 12?

b) Kokia tikimybė, kad abiejose kortelėse esančių skaičių suma mažesnė už 14?

c) Pabaikite sakinius:
1) Tikimybė, kad suma yra skaičius, mažesnis už ...., lygi 0.
2) Tikimybė, kad suma yra skaičius, ne mažesnis už ...., lygi 1.

101. Metamas šešiasienis lošimo kauliukas, kurio išklotinė pavaizduota paveikslėlyje, ir stebimas pasirodęs skaičius.

	2		
1	3	1	3
	2		

a) Ar įvykis „iškrito 3“ yra priešingas įvykiui „neiškrito 3“? Atsakymą pagrįskite.

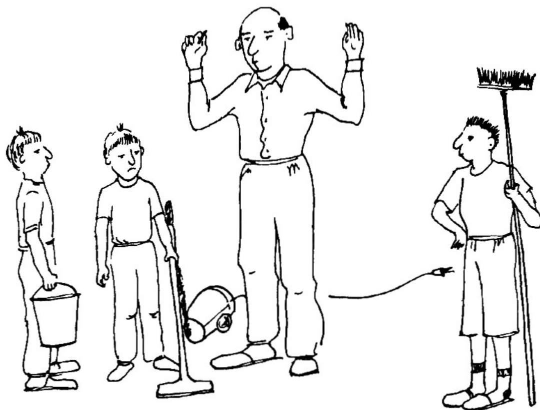
b) Ar įvykis „iškrito skaičius, ne mažesnis už 2“ priešingas įvykiui „iškrito skaičius, ne didesnis už 2“? Atsakymą pagrįskite.

102. PROBLEMŲ SPRENDIMAS

Tėtis paragino savo tris sūnus susitvarkyti kambarį. Šie susiginčijo, kurio eilė. Tuomet tėtis pasiūlė nuo šios dienos tvarkyti kambarį tokia eilės tvarka. Kasdien vienu metu mesti dvi monetas: jeigu atvirs abu skaičiai, tai tvarkys vyriausias, jeigu abu herbai, tai — jauniausias, o jeigu skaičius ir herbas, tai — vidurinysis.



Ar laikydamiesi šios taisyklės broliai tvarkys kambarį vienodai dažnai?





UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

1. c) 4. **2.** f) 12. **3.** 2) a) PS, PR, PV; b) 6.

4. a) 2; b) 2. **5.** a) 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. **6.** d) 4.

7. a) 3; b) 3; c) 12, 13, 21, 23, 31, 32; d) 3; e) 3.

8. a) 10, 11, 12, 20, 21, 22. **9.** **A**.

10. al, am, an, el, em, en, il, im, in, ul, um, un.

11.

Dešimčių skaitmuo: 5, 6, 7, 8

Vienetų skaitmuo: 6 7 8 | 5 7 8 | 5 6 8 | 5 6 7

12 skaičių: 56 57 58 65 67 68 75 76 78 85 86 87

13. a) AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE; b) 60.

15. a) — 1); b) — 2); c) — 3). **16.** 15.

17. a) Spalva ir dydis; b) spalva: balta, juoda; dydis: maža, didelė.

c)

Spalva: b — Dydis: D → bD, M → bM

Spalva: j — Dydis: D → jD, M → jM

	D	M
b	bD	bM
j	jD	jM

20. 6. **21.** 8. **22.** 15. **23.** 6. **24.** a) 7; b) 7; c) 49; d) 20.

25. b) 9; c) 81. **26.** b) 120; c) 20; d) 60. **27.** a) 900; b) 9; c) 891.

28. a) 450; b) 450. **29.** a) 4500; b) 1800. **30.** 40.

31. 6. **32.** 120. **33.** 720. **34.** 6720. **35.** 10.

36. 6. **37.** 20. **38.** a) 16; b) 15; c) 8.

39. 1 — rinkinys, 2 — medžio schema, 3 — galimybių lentelė.

41. a) $10 \cdot 9 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$; b) $10 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$.

42. 24. **43.** 21. **44.** a) 648; b) 48.



45. a) 20; b) 400; c) 70; d) 200.

47. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $\{b, j, p\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

49. {SS, SH, HS, HH}.

51. 36. **52.** 36. **53.** 216.

54. $\frac{3501}{4000}$. **55.** $\frac{1}{50}$. **56.** 67 000. **57.** a) **B**; b) ne; c) taip.

58. Maždaug 745 mokiniai. **60.** Apie 5080 kiškių. **61.** **A**.

63. a) ir c) vienodi šansai rodyklei sustoti pilkos ar baltos spalvos sektoriuje; b) daugiau šansų rodyklei sustoti baltos spalvos sektoriuje.

64. a) Tamsią; b) iš II dėžės.

65. Vienodai tikėtina.

67. **B**. **68.** **B**. **69.** c) **D**; d) **E**; f) **D**.

70. a) $\frac{1}{30}$; b) $\frac{7}{30}$; c) $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$; d) 0.

71. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{5}$; c) 1; d) 0.

72. a) 0,005; b) 0,001; c) 0,004.

73. a) **P**(iškrito vienodi skaičiai) $= \frac{1}{4}$;

P(bent vienas iš šių skaičių didesnis už 4) $= \frac{1}{3}$;

P(abu skaičiai nelyginiai) $= \frac{1}{4}$.

74. 2) a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{18}$. **75.** a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{12}$; d) 0. **76.** $\frac{1}{3}$.

77. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{17}{45}$. **79.** a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{5}{8}$. **80.** a) $\frac{5}{36}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $\frac{11}{18}$.

81. b) $\frac{1}{9}$. **82.** 2) a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{2}{9}$; c) $\frac{5}{9}$. **83.** a) 1; b) 0; c) $\frac{1}{16}$; d) $\frac{1}{4}$.

84. **P**(nelyginis) $= \frac{1}{2}$, **P**(lyginis) $= \frac{17}{36}$, **P**(nulis) $= \frac{1}{36}$.

85. a) 0,384; b) 0,096; c) 0,08; d) 0,512.

87. a) Taip; b) ne. **88.** 0,04.

89.

Įvykis	**P**(įvykio)	Priešingas įvykis	**P**(priešingo įvykio)
Iškris 9	$\frac{1}{3}$	Iškris ne 9	$\frac{2}{3}$
Iškris mažiau negu 9	$\frac{2}{3}$	Iškris ne mažiau negu 9	$\frac{1}{3}$
Iškris daugiau negu 9	0	Iškris ne daugiau negu 9	1

93. 12. **97.** a) $\frac{51}{200}$; b) **A**. **98.** 510.

99. $\frac{1}{3}$. **100.** a) **A**; b) $\frac{8}{9}$. **101.** a) Taip; b) ne.

Klasė	Esminiai gebėjimai
5–6	*Supranta*, kas yra dviejų elementų rinkinys. Paprasčiausiais atvejais *sudaro* dviejų elementų rinkinius (*remiasi* galimybių medžiu ar lentele, sąrašu, *tiesiogiai apskaičiuoja* rinkinių variantų skaičių. *Pateikia* rinkinių, kuriuose elementų tvarka svarbi, ir rinkinių, kuriuose elementų tvarka nesvarbi, pavyzdžių.)
7–8	*Supranta*, kas yra kelių elementų rinkinys. Paprasčiausiais atvejais *braižo* galimybių medį, galimybių lentelę, *sudaro* kelių elementų rinkinių sąrašą. *Supranta ir taiko* daugybos taisyklę mažam rinkinių skaičiui apskaičiuoti. *Supranta*, kas yra bandymas ir jo baigtys. Kartodami paprasčiausią bandymą *nustato* galimas jo baigtis. Paprasčiausiais atvejais pasirinkę baigčių kodus *užrašo* visas bandymo baigtis. Intuityviai nustato, kuri baigtis iš dviejų ar kelių baigčių labiau (mažiau) tikėtina, *taiko* šias sąvokas paprasčiausiems uždaviniams spręsti.
9–10	*Braižo* galimybių medį, galimybių lentelę, *sudaro* rinkinių sąrašą, paprastiems tikimybių uždaviniams *spręsti.* *Apskaičiuoja* rinkinių, kuriuose elementų tvarka svarbi, ir rinkinių, kuriuose elementų tvarka nesvarbi, skaičių. *Taiko* kombinatorikos sudėties ar (ir) daugybos taisykles paprastiems uždaviniams spręsti. *Supranta* bandymo ir jo baigčių aibės, su bandymu susieto įvykio ir jam palankių baigčių aibės sąvokas. *Suskaičiuoja* bandymo baigtis, *nustato*, kurios jų palankios su bandymu susietam įvykiui. Kartoja bandymą daug kartų, suskaičiuoja, kiek kartų įvyko, kiek kartų neįvyko su bandymais susietas įvykis. Apskaičiuoja nesudėtingo įvykio santykinį dažnį ir juo įvertina įvykio tikimybę. *Moka* klasikinį tikimybės apibrėžimą ir *supranta*, kada galima jį taikyti. Paprastais atvejais, taikydami klasikinį tikimybės apibrėžimą, *apskaičiuoja* įvykių tikimybes bei *palygina* atsitiktinius įvykius pagal jų tikimybes. *Atskiria* būtinus, negalimus įvykius, *žino*, kam lygi jų tikimybė. *Atpažįsta* įvykiui priešingą įvykį, *apskaičiuoja* jo tikimybę.